
Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ die kritischen Punkte und ihre Hessematrix in jedem kritischen Punkt. Geben Sie ferner alle lokalen Extremstellen an:

(a) $F(x,y) = \sin x - \sin y\,,$

(b) $G(x,y) = \cos(x^2+y^2)\,,$

(c) $H(x,y) = x^2+y^2-\sin(x^2+y^2)\,.$

Aufgabe 2 *(Kriterium für positive Definitheit)* (4 Punkte)

Es sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. A ist genau dann positiv definit, wenn für jeden Index k mit $1 \leq k \leq n$ die als k-ter Hauptminor von *A bekannte Determinante $A_k = \det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ positiv ist.*

(a) Unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten ist die symmetrische reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ positiv (oder negativ) definit, positiv (oder negativ) semidefinit bzw. indefinit?

(b) Wann und nur wann ist die symmetrische, reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$$

positiv definit?

Aufgabe 3 *(eindimensional vs. mehrdimensional)* (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y-\epsilon x^2)(y-x^2), 0 < \epsilon < 1.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen $\{(x,y) : f(x,y) > 0\}$.

(b) Sei L eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_L$ in $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum hat.

(c) Die Funktion f hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum.

Aufgabe 4 *(Konvexität)* (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie:

(a) Ist f nicht konstant, so wird das Maximum von f nicht im Innern von I angenommen. Ist f zusätzlich auch noch stetig, so nimmt f das Maximum auf einem Punkt $x \in \{a, b\}$ an.

(b) Ist f strikt konvex, so wird das Minimium von f in höchstens einem Punkt $x \in [a, b]$ angenommen. Ist f strikt konvex und stetig, so wird das Minimum in genau einem Punkt $x \in [a, b]$ angenommen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 29.5. bis 12:00**.