Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 29.5.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylorpolynom um $(1,1)$ bis einschließlich der Terme zweiten Grades von $f(x,y) = x\exp(x-y)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in U$ ein Punkt. In einer Umgebung von x gelte

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha + \varphi(\xi) \quad \text{und} \quad f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \tilde{c}_\alpha \xi^\alpha + \tilde{\varphi}(\xi)$$

mit $\varphi(\xi) = o(|\xi|^k)$ und $\tilde{\varphi}(\xi) = o(|\xi|^k)$. Man zeige, dass dann bereits $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt. ($\varphi(\xi) = o(|\xi|^k) \Leftrightarrow |\varphi(\xi)|/|\xi|^k \to 0$ mit $\xi \to 0$.)

Aufgabe 3 (*Stützhyperebenen*) (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie: zu jedem $x \in \partial M$ gibt es ein $\nu \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, so dass

$$M \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x\rangle \geq 0\}.$$

Man nennt dann $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x\rangle = 0\}$ eine Stützhyperebene in $x \in \partial M$.
Anleitung. Wähle $p_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$ mit $p_k \to x$, und bestimme $x_k \in M$ mit $|x_k - p_k| = \inf_{y\in M} |y - p_k|$. Nach Wahl einer Teilfolge konvergiert $(x_k - p_k)/|x_k - p_k|$ gegen ein ν wie verlangt (was zu zeigen ist).

Aufgabe 4 (*Nichtdegenerierte kritische Punkte*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein kritischer Punkt $x \in \Omega$ der Funktion $f \in C^2(\Omega)$ heißt *nichtdegeneriert*, wenn die Hessematrix $D^2 f(x)$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass x dann ein isolierter kritischer Punkt ist: es gibt eine offene Umgebung $B_\epsilon(x)$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 13.6. bis 12:00**.