

Aufgabe 1 (*Parameterabhängige Integrale*) (4 Punkte)

Man berechne das Integral

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt$$

durch Differenzieren des parameterabhängigen Integrals

$$F(y) := \int_0^x e^{-ty} dt.$$

Aufgabe 2 (*Parameterabhängige Integrale*) (4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Man zeige, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) := \int_0^1 g(x, y) dx \quad \text{und} \quad f^*(y) := \int_0^1 D_2 g(x, y) dx$$

wohldefiniert sind, und dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq f^*(0)$ gilt.

Aufgabe 3 (*Logarithmische Spirale*) (4 Punkte)

Sei $0 \neq c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t)$.

- Sie skizzieren die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.
- Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.
- Existiert $\lim_{a \rightarrow -\infty} L_{a,b}$?
- Zeigen Sie, dass die Funktion f jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen den Cosinus des Schnittwinkels.

Aufgabe 4 (*Parametersierung nach Bogenlänge*) (4 Punkte)

Parametrisieren Sie die Kurve

$$C(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

nach Bogenlänge s . Welcher Punkt entspricht der Länge $s = 1$?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 20.6. bis 12:00.