Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 20.6.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 (*Kuvernintergral*) (4 Punkte)
Seien $\gamma_{1,2} : I_{1,2} \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven. Dann heißt γ_2 Umparametrisierung von γ_1, falls eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$ existiert, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Zeigen Sie, dass die Relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls γ_2 Umparametrisierung von γ_1 ist, eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2 (*Kuvernintergral*) (4 Punkte)
Berechnen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 : (x) \mapsto \frac{1}{\|x\|^3}\, x$$

das Kurvenintegral über das sogenannte Vivianische Fenster

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Aufgabe 3 (*Stammfunktion*) (8 Punkte)

(a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x) := x \log(1 + \|x\|^2)$.

  (i) Ist das Vektorfeld f rotationsfrei? (d.h. $\partial_i F_j = \partial_j F_i$?)

  (ii) Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei γ_x die Verbindungsstrecke von 0 nach x.
  Bestimme $\displaystyle\int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}$.

  (iii) Besitzt F eine Stammfunktion? Bestimme gegebenenfalls eine solche.

(b) Zeigen Sie, dass das folgende Vektorfeld $F : \Omega \to R^2$ rotationsfrei ist, aber kein Stammfunktion in Ω hat. Woran liegt das?

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}.$$

(c) Nutzen Sie Kurvenintegrale um eine Stammfunktion von $F : (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{x} \\ 1 \\ \log x \end{pmatrix}$$

zu finden.
Idee: Sie zeigen zuerst, dass F ein Potential hat, und berechnen dann via Kurvenintegrale.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 26.6. bis 12:00**.