Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis II — SS 2017, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 26.6.2017
Dr. Ch. Ketterer

Aufgabe 1 (*komplexe differenzierbarkeit*) (4 Punkte)
Sind folgende Funktionen holomorph (komplex differenzierbar) in ganz $\mathbb{C}$? Nachweis mit Cauchy-Riemann-Gleichungen!
(a) $f(z) = e^{-z^2}$. (b) $g(z) = z + z^3$.

Aufgabe 2 (*komplexes Kurvenintegral*) (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma z^n dz,$$

mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. (*Fallunterscheidung von n!*)

Aufgabe 3 (*holomorph*) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & \text{falls } z \neq 0, \\ 0, & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $z = 0$ partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemann-Gleichung erfüllen.
b) Zeigen Sie, dass f in $z \neq 0$ nicht komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 4 (*harmonische Funktionen*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$. Eine relle C^2 Funktion $w : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls

$$\Delta w := \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Ist $f = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph. Sie zeigen dass u und v harmonisch sind.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 3.7. bis 12:00**.