Aufgabe 1 *(Mengenringe)*
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{R}$ ein Ring über Y, so ist $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{R}\}$ ein Ring über X.

(b) Ist $\mathcal{A}$ ein Ring über X, so ist $\mathcal{B} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ein Ring über Y.

Aufgabe 2 *(Abstandsfunktion auf einem Ring)*
Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R} \subset 2^X$. Wir definieren die Funktion

$$d(A, B) := \mu(A \triangle B) \quad \text{für } A, B \in \mathcal{R},$$

wobei $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (die symmetrische Differenz). Zeigen Sie:

(a) $d(\cdot, \cdot)$ ist nichtnegativ, symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung.

(b) $A \sim B \Leftrightarrow d(A, B) = 0$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{R}$.

(c) Auf der Menge $\mathcal{R}/\sim$ der Äquivalenzklassen wird durch $d(\cdot, \cdot)$ eine Metrik induziert.

Aufgabe 3 *(Quadrierbare Mengen)*
Zeigen Sie: ist A beschränkte Teilmenge der Hyperebene $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, so ist A quadrierbar und hat Jordaninhalt Null.

Aufgabe 4 *(Lipschitzbilder von Würfeln)*
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Lipschitzstetig mit Konstante $L \in [0, \infty)$. Sei $P \subset \Omega$ ein Würfel mit Kantenlänge $a \geq 0$. Zeigen Sie: es gibt einen Würfel $Q \subset \mathbb{R}^m$ mit Kantenlänge $b \leq \sqrt{n}\, La$, so dass $f(P) \subset Q$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 28.10.2016, vor der Vorlesung.