Aufgabe 1 (*Messbarkeit beim Cavalieri-Prinzip*)
Sei $E_1 = \big([0,1] \times ([0,1]\backslash S)\big) \cup \big([1,2] \times S\big)$, mit $S \subset [0,1]$ nicht $\mathcal{L}^1$-messbar. Weiter sei $E_2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Die y-Schnitte von E_1, E_2 und $E_1 \cup E_2$ sind $\mathcal{L}^1$-messbar für alle $y \in \mathbb{R}$.

(b) Die Funktionen f_{E_1}, f_{E_2} sind $\mathcal{L}^1$-messbar, aber nicht $f_{E_1 \cup E_2}$.

Hinweis. Es ist $f_E(y) = \mathcal{L}^1(E_y)$, wobei E_y der y-Schnitt ist für $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 *(Iterierte Integrale)*
Prüfen Sie jeweils, ob die iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\,dx$$

existieren und gleich sind, und ob die Funktion in $L^1(\mathbb{R}^2)$ liegt. Dabei sei in allen Fällen $f(0,0) = 0$ gesetzt.

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}\,\chi_{[0,1]^2}$.

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\chi_{[-1,1]^2}$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\chi_{[0,1]^2}$.

Aufgabe 3 *(Volumen eines Voll-Torus)*
Sei $0 < \varrho < R$ und $D = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-R)^2 + z^2 < \varrho^2\}$. Der Volltorus T entsteht durch Rotation von D um die z-Achse. Berechnen Sie das Volumen von T mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips.

Aufgabe 4 *(Separabilität von $L^p(\mathbb{R}^n)$)*
Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare Teilmenge besitzt, die dicht ist. Zeigen Sie:

(a) $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist separabel für $1 \le p < \infty$.

(b) $L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{card})$ ist nicht separabel.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 12.01.2017.