Aufgabe 1 (*Adjungierter Differentialoperator*)
Gegeben sei ein Differentialoperator

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu \qquad \text{für } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq i,j \leq n$.

(a) Bestimmen Sie einen Differentialoperator L^* desselben Typs so dass gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Lu)v \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} u(L^*v)\, d\mathcal{L}^n \qquad \text{für alle } u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(b) Sind die Koeffizienten von L^* eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2 (*Berechnungen mit Fubini*)
Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_A y\sqrt{x}\, d\mathcal{L}^2(x,y) \quad \text{mit} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\},$

(b) $\displaystyle\int_B \frac{y}{x} e^x d\mathcal{L}^2(x,y) \quad \text{mit} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$

Aufgabe 3 (*Allgemeine Transformationsformel*)
Sei μ äußeres Maß auf X, $\phi : X \to Y$ und $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist $g \circ \phi$ μ-messbar, so ist g auch $\phi(\mu)$-messbar (Bildmaß) und es gilt, wenn eines der Integrale existiert,

$$\int_Y g\, d(\phi(\mu)) = \int_X g \circ \phi \, d\mu.$$

Aufgabe 4 (*Newtonpotential*)
Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : r_1 < |x| < r_2\}$, und $f \in L^1(A)$ sei rotationsinvariant, also $f(Tx) = f(x)$ für alle $x \in A$, $T \in \mathbb{SO}(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie

$$\int_A \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy = \begin{cases} \text{konstant} & \text{für } |x| < r_1, \\ m/|x| & \text{für } |x| > r_2, \quad \text{wobei } m = \int_A f(x)\, dx. \end{cases}$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 19.01.2017.