Aufgabe 1 *(Eine Fouriertransformierte)*
Sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ symmetrisch und strikt positiv definit. Berechnen Sie das Integral

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ \hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, e^{-i\langle p,x\rangle}\, dx.$$

Aufgabe 2 *(Konforme Diffeomorphismen)*
Sei $\phi \in C^\infty(U,V)$ konformer Diffeomorphismus, d.h. das induzierte Skalarprodukt ist von der Form $g = \lambda^2\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit $\lambda : U \to (0,\infty)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\Delta_g u = \dfrac{1}{\lambda^2}\,\left(\Delta u + (n-2)\langle Du, D\log\lambda\rangle\right)$

(b) $\Delta(\lambda^{\frac{n-2}{2}}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta(\lambda^{\frac{n-2}{2}}u) = \lambda^{\frac{n+2}{2}}\Delta_g u$

(c) $\phi(x) = \dfrac{x}{|x|^2} \quad\Rightarrow\quad (\Delta v)\circ\phi = |x|^{2+n}\,\Delta(|x|^{2-n}(v\circ\phi))$.

Insbesondere ist mit v auch $|x|^{2-n}v\circ\phi$ harmonisch.

Aufgabe 3 *(Sektorformel von Leibniz)*
Sei $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = r(t)\,(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ mit $r,\varphi \in C^1(I)$, $\varphi' > 0$ und $\varphi \in [0,2\pi]$. Sei $A(c)$ die vom Ortsvektor überstrichene Fläche. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^2(A(c)) = \frac{1}{2}\int_I r^2\varphi'\,dt.$$

Aufgabe 4 *(Schwarzscher Stiefel)*
Gegeben sei der Zylindermantel $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\}$ mit Parametrisierung $\varphi : [0,2\pi]\times[0,1] \to Z$, $\varphi(\vartheta,z) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, z)$. Um den Flächeninhalt zu approximieren, wählen wir Unterteilungspunkte

$$p_{k,l} = \left(\frac{2\pi k}{2m}, \frac{l}{2n}\right) \text{ mit } 0 \le k \le 2m,\ 0 \le l \le 2n,\ k+l \text{ gerade},$$

und zerlegen so das Parametergebiet in Dreiecke mit Basis der Länge $2\pi/m$ auf den Strecken $z = l/(2n)$ und Höhe $1/(2n)$. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der zugehörigen Bilddreiecke und untersuchen den Grenzwert für $m,n \to \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 26.01.2017.