
Aufgabe 1 *(Untermannigfaltigkeiten)*
Für $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gelte: zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^1-Immersion $f : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $p \in f(U) \subset M$, die eine Einbettung ist, also $f : U \to M$ lokal homöomorph. Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2 *(Torus in $\mathbb{R}^4$)*
Betrachten Sie für $0 < r < 1$ den Torus

$$T_r = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |z|^2 = r^2,\ |w|^2 = 1 - r^2\}.$$

Zeigen Sie, dass T_r eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt von T_r.

Aufgabe 3 *(Ein Oberflächenintegral)*
Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\mathbb{S}^2} x^2 y^2 z^2 \, d\mu_{\mathbb{S}^2}.$$

Aufgabe 4 *(Eine Immersion)*
Betrachten Sie $V : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$, $V(x) = x \otimes x$, d.h. $V(x)y = \langle x, y\rangle x$. Zeigen Sie:

(a) $V(\mathbb{S}^2)$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Untermannigfaltigkeit.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 02.02.2017.