Aufgabe 1 *(Eigenwerte des Laplaceoperators)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u \neq 0$, Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $\lambda > 0$. Was gilt im Fall der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$?

Aufgabe 2 *(Eine Indexformel)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, und $x_0 \notin \partial\Omega$. Rechnen Sie nach, dass mit $\omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$ gilt:

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} \left\langle \frac{x - x_0}{|x - x_0|^n}, \nu(x) \right\rangle d\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_0 \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Aufgabe 3 *(Archimedisches Prinzip)*
Der untere Halbraum $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$ sei mit einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$ ausgefüllt. Auf einen Körper $\Omega \subset \mathbb{H}$ wirkt dann bei $x \in \partial\Omega$ der vektorielle Druck $p(x) = \varrho x_3 \nu(x)$, wobei $\nu(x)$ äußere Normale ist. Berechnen Sie den Auftrieb

$$A = \int_{\partial\Omega} p(x)\, d\mu(x).$$

Aufgabe 4 *(Riemannscher Satz von Gauß)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, und $g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n})$ sei Riemannsche Metrik, also symmetrisch und strikt positiv definit. Formulieren und beweisen sie eine Riemannsche Version des Satzes von Gauß.
Anmerkung. Daraus folgt auch ein Satz von Gauß auf Untermannigfaltigkeiten.

Abgabe freiwillig