Aufgabe 1 *(quadrierbare Mengen)*

(a) Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar gilt $\mathrm{vol}^n(A) + \mathrm{vol}^n(B) = \mathrm{vol}^n(A \cup B) + \mathrm{vol}^n(A \cap B)$.

(b) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig und $\mathrm{vol}^n(E) = 0$, so folgt $\mathrm{vol}^n(f(E)) = 0$.

Aufgabe 2 *(Kartesische Produkte)*
Seien $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar. Zeigen Sie, dass $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ quadrierbar ist und dass gilt:

$$\mathrm{vol}^{m+n}(M \times N) = \mathrm{vol}^m(M) \cdot \mathrm{vol}^n(N).$$

Aufgabe 3 *(Hausdorffmaß)*
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $s > 0$. Betrachten Sie für $A \subset X$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^\infty \alpha_s \Big(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\Big)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j,\ \operatorname{diam} C_j < \delta \Big\}.$$

Dabei ist $\alpha_s > 0$ eine Normierungskonstante. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ ist ein äußeres Maß.

(b) $\mathcal{H}^s = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ existiert und ist ebenfalls ein äußeres Maß.

Aufgabe 4 *(Ein vollständiger metrischer Raum)*
Sei $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß und $\mathcal{M}$ das System der μ-messbaren Mengen. Wir setzen analog zu Aufgabe 2, Übung 1,

$$d(A, B) = \mu(A \triangle B) \quad \text{und} \quad A \sim B \Leftrightarrow d(A, B) = 0.$$

Zeigen Sie: $(\mathcal{M}, d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 3.11.2016.