Aufgabe 1 *(Konstruktion von äußeren Maßen)*
Seien μ_i äußere Maße auf X und $\alpha_i \in [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i(A) \quad (A \subset X),$$

ein äußeres Maß definiert, und dass Mengen μ-messbar sind, wenn sie μ_i-messbar sind für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 *(Cantormenge)*
Die Cantormenge C ist die Menge aller $x \in [0, 1]$, die eine triadische Entwicklung $x = 0, k_1 k_2 \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j}$ erlauben mit Ziffern $k_j \in \{0, 2\}$. Zeigen Sie:

(a) Sei C_n die Menge der $x = 0, k_1 k_2 \ldots \in [0, 1]$ mit $k_j \in \{0, 2\}$ für $j \leq n$, und $C_0 := [0, 1]$. Dann ist C_{n+1} die disjunkte Vereinigung

$$C_{n+1} = \left\{ \frac{x}{3} : x \in C_n \right\} \cup \left\{ \frac{2}{3} + \frac{x}{3} : x \in C_n \right\}.$$

(b) $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

(c) C ist abgeschlossen und nicht abzählbar.

(d) C hat Jordan-Inhalt Null und ist nirgends dicht.

Aufgabe 3 *(Zur Kompaktheit)*
Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums (X, d), und $(U_i)_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam} A \leq \delta$ ein $i \in I$ existiert mit $A \subset U_i$.

Aufgabe 4 *(Nullmengen)*
Sei μ ein äußeres Maß auf X. Zeigen Sie:

(a) Jede Nullmenge ist μ-messbar.

(b) Jede Teilmenge einer μ-Nullmenge ist wieder μ-Nullmenge.

(c) Eine abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen ist ebenfalls eine Nullmenge.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 10.11.2016.