Aufgabe 1 *(die erzeugte σ-Algebra)*
Nach Vorlesung ist die von $\mathcal{E} \subset 2^X$ erzeugte σ-Algebra definiert durch

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}.$$

Zeigen Sie: $\sigma(\mathcal{E})$ ist in der Tat eine σ-Algebra.

Aufgabe 2 *(Kritische Werte)*
Sei $f \in C^1(I)$, $I = (a,b)$, mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Die Menge der kritischen Punkte von f ist $C_f = \{x \in I : f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(C_f)$ eine $\mathcal{L}^1$-Nullmenge ist.
Hinweis. Zu finden sind Intervalle J_k mit $\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \varepsilon$, sodass $f(C_f) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$.

Aufgabe 3 *(Beispiel zur Maßfortsetzung)*
Sei $\mathcal{A}$ das System der Mengen $A \subset \mathbb{R}$, für die A oder $\mathbb{R} \backslash A$ abzählbar ist, und

$$\lambda(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1 & \text{falls } \mathbb{R} \backslash A \text{ abzählbar.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und λ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Caratheodory-Fortsetzung μ von λ und das System der μ-messbaren Mengen.

(c) Ist μ ein Inhalt auf $2^{\mathbb{R}}$?

Aufgabe 4 *(Lebesgue-Stieltjes Maß)*

(a) Zeigen Sie, dass das System $\mathcal{T}$ der nach links halboffenen Intervalle $(a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, ein Halbring in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig. Wir betrachten

$$\lambda_F : \mathcal{T} \to \mathbb{R},\ \lambda_F((a,b]) = F(b) - F(a).$$

Zeigen Sie dass λ_F ein Prämaß ist.

(c) Die Caratheodory Fortsetzung von λ_F heißt Lebesgue-Stieltjes Maß μ_F auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie $\mu_F((a,b])$, $\mu_F((a,b))$, $\mu_F([a,b])$ und $\mu_F([a,b))$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 17.11.2016, vor der Vorlesung.