Aufgabe 1 (*Messbarkeit bzgl.* $\mathcal{L}^n$)
Die Hauptaussage von Satz 4.2 folgt direkt aus Satz 3.2, in Verbindung mit Lemma 4.2. Der Zusatz wird aber extra bewiesen. Lesen und verstehen Sie diesen Beweis.

Aufgabe 2 (*Cantorfunktion*)
Sei $C = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$ die Cantormenge. Dabei ist C_n die Menge aller $x = \sum_{j=1}^\infty k_j 3^{-j}$ mit $k_j \in \{0,1,2\}$ und $k_j \neq 1$ für $j = 1,\ldots,n$. (vgl. Aufgabe 2, Serie 3).

(a) Konstruieren Sie $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ stetig, monoton wachsend und surjektiv sodass

$$F(x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{k_j}{2} 2^{-j} \quad \text{für } x = \sum_{j=1}^\infty k_j 3^{-j} \in C.$$

(b) Sei μ_F das zu F gehörige Lebesgue-Stieltjes-Maß, vgl. Aufgabe 4, Serie 4. Zeigen Sie $\mu_F(\mathbb{R}\backslash C) = 0$ und $\mu_F(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Interpretation: Die „Ableitung "der Cantorfunktion F ist ein Maß, dass auf der $\mathcal{L}^1$-Nullmenge C lebt und keinen Dirac-Anteil hat.

Aufgabe 3 (*Parallelepiped*)
Das von den Punkten $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}^n$ erzeugte Parallelepiped ist die Menge

$$S = \Big\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ für } i = 1,\ldots,n \Big\}.$$

Bestimmen Sie $\mathcal{L}^n(S)$.
Bemerkung. Synoyme sind Spat sowie Parallelotop. Sie benötigen Satz 4.7.

Aufgabe 4 (*Invariantes Borelmaß auf* $\mathbb{S}^{n-1}$)
Definieren Sie auf der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ein nichttriviales Borelmaß, das unter der Operation der orthogonalen Gruppe $\mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ invariant ist.
Hinweis. Die Borelalgebra in einem metrischen Raum ist definiert als die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra. Überlegen Sie: die Borelmengen von $\mathbb{S}^{n-1}$ sind genau von der Form $B \cap \mathbb{S}^{n-1}$ für alle Borelmengen $B \subset \mathbb{R}^n$. Denken Sie auch an die von $\mathbb{R}^n$ induzierten offenen Mengen von $\mathbb{S}^{n-1}$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 24.11.2016.