Aufgabe 1 (*System der Borelmengen*)
Sei $\mathcal{B}^n$ das System der Borelmengen im $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Zeigen Sie $\mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q \subset \mathcal{B}^n$.

Aufgabe 2 (*Maße von Kugeln*)
Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Funktion

$$\theta : \mathbb{R}^n \times ([0,\infty) \to [0,\infty),\ \theta(x,r) = \mu(B_r(x)) \quad \text{wobei } B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}.$$

Zeigen Sie: die Funktion $\theta(\cdot, r)$ ist unterhalbstetig und messbar bezüglich $\mathcal{B}^n$.
Hinweis: Eine Funktion f heißt unterhalbstetig in x_0, wenn $\liminf_{x\to x_0} \geq f(x_0)$.

Aufgabe 3 (*Integration bzgl. Bildmaß*)
Sei $f : X \to Y$ messbar bzgl. der σ-Algebren $\mathcal{A} \subset 2^X$ und $\mathcal{B} \subset 2^Y$, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Sei weiter μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.

(a) $f(\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B))$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}$.

(b) Ist $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar bzgl. $\mathcal{B}$, so ist $g \circ f$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$.

(c) Für eine $\mathcal{B}$-messbare Funktion $g : Y \to [0,\infty]$ ist

$$\int g\, d(f(\mu)) = \int g \circ f\, d\mu.$$

Aufgabe 4 (*Konvergenz im Maß/Stochastische Konvergenz I*)
Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) < \infty$. Die Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiere punktweise μ-fast-überall gegen eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 1.12.2016.