Übungsaufgaben zur Analysis III | WS 16/17, Serie 7
E. Kuwert, J. Scheuer | 1.12.2016
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Analysis3WS1617

Aufgabe 1 (*Integral-Vergleichskriterium*)
Eine monoton fallende, beschränkte Funktion $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ ist genau dann integrierbar bzgl. $\mathcal{L}^1$ auf $(0,\infty)$, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert.

Aufgabe 2 (*Konvergenz im Maß/Stochastische Konvergenz II*)
Die Umkehrung der Aussage von Blatt 6, Aufgabe 4 ist im Allgemeinen falsch, d.h. Konvergenz im Maß impliziert nicht Konvergenz punktweise μ-fast-überall. Finden Sie ein Beispiel.

Aufgabe 3 (*Integration bzgl. Diracmaß*)
Sei X eine Menge, und δ_{x_0} sei das Diracmaß auf X im Punkt x_0. Bestimmen Sie die bzgl. δ_{x_0} integrierbaren Funktionen und berechnen Sie das Integral (mit Beweis).

Aufgabe 4 (*Ungleichung von Jensen*)
Sei μ äußeres Maß auf X mit $0 < \mu(X) < \infty$, und $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall. Zeigen Sie: ist $\phi \in C^1(I)$ konvex, so gilt für integrierbares $f : X \to I$

$$\phi\Big({-\!\!\!\!\!\!\int_X} f\,d\mu \Big) \le {-\!\!\!\!\!\!\int_X} \phi \circ f\,d\mu \quad \text{wobei} \quad {-\!\!\!\!\!\!\int_X} \ldots\,d\mu = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \ldots\,d\mu.$$

Hinweis. Für $y_0 \in I$ gilt $\phi(y) \ge \phi(y_0) + \phi'(y_0)(y - y_0)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 8.12.2016.