Aufgabe 1 (*Unendliche Reihen integrierbarer Funktionen*)
Es sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ punktweise μ-fast-überall gegen eine integrierbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ und es gilt

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Aufgabe 2 (*Zur Integrierbarkeit*)
Sind $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $\mu(X) < \infty$, so ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(\{|f| > n\}\big) < \infty.$$

Aufgabe 3 (*Newtonpotential*)
Der Träger einer Funktion $\varrho \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge $\operatorname{spt} \varrho = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x) \neq 0\}}$. Betrachten Sie für $n \geq 3$ und $\operatorname{spt} \varrho$ kompakt die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u(x) = \int \frac{\varrho(y)}{|x-y|^{n-2}} \, d\mathcal{L}^n(y).$$

Zeigen Sie, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist und dass u auf $\mathbb{R}^n \backslash \operatorname{spt} \varrho$ unendlich oft differenzierbar ist mit $\Delta u = 0$.

Aufgabe 4 (*Zur dominierten Konvergenz*)
Für $1 \leq p < \infty$ seien $f_k, f \in L^p(\mu)$ mit $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$ für μ-fast-alle $x \in X$. Weiter gebe es integrierbare Funktionen $g_k, g : X \to [0, \infty]$ mit $|f_k|^p \leq g_k$ μ-fast-überall, für alle $k \in \mathbb{N}$, und $g_k \to g$ in $L^1(\mu)$ mit $k \to \infty$. Dann folgt $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$ mit $k \to \infty$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 15.12.2016.