Aufgabe 1 (*Zu den L^p-Integralen*)
Sei $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie für eine μ-messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q}$ für $1 \leq p < q \leq \infty$.

(b) $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

(c) $\lim_{p\to-\infty} \|f\|_{L^p} = \operatorname{essinf} f$ für $f > 0$.

Hinweis. $\operatorname{essinf} f = \sup\{s \in \mathbb{R} : \mu(\{f < s\}) = 0\}$.

Aufgabe 2 (*L^p-Konvergenz bei Translationen*)
Für $h \in \mathbb{R}$ sei $\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$. Beweisen Sie für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{h\to 0} \|f \circ \tau_h - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Gilt das auch für $p = \infty$?

Aufgabe 3 (*Gleichheitsfälle*)
Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Wann gilt Gleichheit in der Hölder-Ungleichung

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}?$$

b) Wann gilt Gleichheit in der Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}?$$

Aufgabe 4 (*Zum Lemma von Fatou*)
Seien $f_k : X \to [0, \infty]$ mit $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu = 0$. Zeigen Sie $\liminf_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$. Kann $\liminf$ durch $\lim$ ersetzt werden?

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 22.12.2016.