Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 1
Prof. Dr. G. Wang — 16.10.2017
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Konstruieren Sie eine Folge (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\cdots$ von offenen Intervallen mit $\mathbb{Q} \subset \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| < \epsilon$. Zeigen Sie, dass dann $\cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \neq \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2 (12 + 4* Punkte)
Definition. *Eine Familie* $(a_i)_{i\in I}$ *reeller Zahlen heißt* summierbar *mit Summe* a, *wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine endliche Teilmenge* $E_0 \subset I$ *gibt, so dass für jede endliche Teilmenge* $E \subset I$ *mit* $E_0 \subset E$ *die Ungleichung* $|a - \sum_{i\in E} a_i| < \epsilon$ *gilt.*

a). Beweisen Sie: $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann summierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subset I$ gibt, so dass für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge $K \subset I$ gilt, dass $|\sum_{i\in K} a_i| < \epsilon$.

b). Zeigen Sie, dass $(a_i)_{i\in I}$ genau dann summierbar ist, wenn $(|a_i|)_{i\in I}$ summierbar ist.

c). Beweisen Sie: Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ nicht-negativer reeller Zahlen ist genau dann summierbar, wenn es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\sum_{i\in E} a_i < c$ für jede endliche Teilmenge $E \subset I$.

d). Zeigen Sie, dass jede Teilfamilie $(a_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ einer summierbaren Familie $(a_i)_{i\in I}$ wieder summierbar ist.

e). Ist $(a_i)_{i\in I}$ summierbar und für $J \subset I$ eine endliche Zerlegung $J = J_1 \cup \cdots J_s$ in paarweise disjunkte Teilmengen $J_1, \cdots, J_s \subset J$ gegeben, so gilt

$$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in J_1} a_i + \cdots + \sum_{i\in J_s} a_i.$$

f). Sei $(a_i)_{i\in I}$ summierbar und sei $J_k \subset J_{k+1} \subset I$ eine Folge mit $\cup_{k=1}^{\infty} J_k = I$. Dann gilt

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{j\in J_k} a_i.$$

g). Sei $(a_i)_{i\in I}$ summierbar. Dann sind nur abzählbar viele a_i von Null verschieden.

i). Wie kann man "Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen heißt *summierbar mit Summe* ∞" sinnvoll definieren?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 23.10 bis 12:00**.