Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 18.12.2017
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4* Punkte)

Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelsche Menge und $f : B \to [0, \infty)$ eine nicht-negative messbare Funktion. Man zeige: Die Menge

$$V := \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

ist eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$. Genau dann ist f über B integrierbar, wenn das $(n + 1)$-dimensionale Lebesguesche Maß von V endlich ist. In diesem fall gilt

$$Vol_{n+1}(V) = \int_B f(x)dx.$$

Aufgabe 2 (4* Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini den Flächeninhalt der folgenden Fläche $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq xy \leq 2 \text{ und } 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2.\}$$

Aufgabe 3 (4* Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das von $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ aufgespannte Dreieck und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass

$$\int_D g(x + y)d\mathcal{L}^2(x, y) = \int_0^1 g(t)tdt.$$

Aufgabe 4 (4* Punkte)

Sei $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$. Vergleichen Sie die Werte

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x, y)d\mathcal{L}^1(y)d\mathcal{L}^1(x), \quad \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x, y)d\mathcal{L}^1(x)d\mathcal{L}^1(y), \quad \int_{[0,1]^2} f(x, y)d\mathcal{L}^2(x, y).$$

$$a) \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & \text{falls } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{falls } 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad b) \quad f(x, y) = (1 - xy)^2.$$

Aufgabe 5 *(Transformationsformel für ebene Polarkoordinaten)* (4* Punkte)

Berechnen Sie das Intergral $\int_B f d\mathcal{L}^2$ mit
(a) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ und } y > 0\}$ und $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$
(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ und $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

Hinweis: In Teil (b) müssen Sie eine geeignete Menge vom Maß 0 weglassen, bevor Sie die Transformationsformel anwenden können.

Aufgabe 6*(Volumenberechnung mit Kugelkoordinaten)* (4* Punkte)

Skizzieren Sie grob die Menge B und berechnen Sie ihr Volumen:

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ und } 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Aufgabe 7 (4* Punkte)

Sei $f \in L^p(X, \mu)$ mit $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \in L^q(X, \mu)$ für alle $q \leq p$.

Aufgabe 8 (σ*-Algebra)* *(4* Punkte)*

Sei X eine Menge. Sei $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in X\}$. Betimmen Sie die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$.

Frohe Weihnachten und guten Rustch ins neue Jahr!

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 8.1.2018. bis 12:00**.