

Aufgabe 1 (4 Punkte)

- a) Man berechne das Volumen des Kugelsektors, der in dreidimensionalen Polarkoordinaten durch die Ungleichungen $0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \theta \leq \theta_0$ gegeben ist ($r_0 > 0, 0 < \theta_0 < \pi$).
- b) Sei $\alpha > 0$ und $R > 0$. Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2; y^2 + z^2 \leq \alpha x^2\}$$

Skizzieren Sie die Menge A .

Aufgabe 2 (4 Punkte)

- a) Sei $r : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ stetig und sei (ξ, χ) der Schwerpunkt der Fläche

$$F := \{(x, z) \mid z \in [a, b], 0 \leq x \leq r(z)\},$$

d.h.

$$\xi = \frac{1}{\mathcal{L}^2(F)} \int_F x d\mathcal{L}^2(x, z) \text{ und } \chi = \frac{1}{\mathcal{L}^2(F)} \int_F z d\mathcal{L}^2(x, z).$$

Sei A der durch Rotation von F um die z -Achse entstehende Körper. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^3(A) = 2\pi\xi\mathcal{L}^2(F)$ (*Guldinsche Regel*).

A ist definiert durch: $A = \{(x \cos \theta, x \sin \theta, z) \mid z \in [a, b], 0 \leq x \leq r(z), \theta \in [0, 2\pi)\}$.

- b) Sei T der Volltorus, welcher durch Rotation der Kreisscheibe K mit $K = \{(x, z) \mid (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$, $0 < r < R$ um die z -Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von T und verifizieren Sie hieran die Guldinsche Regel.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K die Kugelschale $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : r \leq |x| \leq R\}$, $0 < r < R < \infty$. Man berechne das Integral (Potential einer Kugelschale)

$$u(\xi) := \int_K \frac{1}{|x - \xi|} d\mathcal{L}^3(x),$$

für die Fälle $\xi < r$, $r \leq |\xi| \leq R$ und $|\xi| > R$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Sei $U := (0, 1) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ und

$$\Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Dies ist die *Zylinderkoordinatenabbildung*. Sei g die induzierte Metrik. Berechnen Sie die Zylinderkoordinatendarstellung von div_g , grad_g und Δ_g .

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 15.1.2018. bis 12:00.