Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 15.1.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1 x_3 - x_2^2, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_2 x_4 - x_3^2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1 x_4 - x_2 x_3. \end{aligned}$$

Man zeige, dass $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien r, R reelle Zahlen mit $0 < r < R$ und K die Kreislinie

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}.$$

Durch Rotation von K um die z-Achse entsteht ein Torus $T \in \mathbb{R}^3$. Man berechne den Flächeninhalt von T.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten die Eulersche Beta-Funktion $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1} dt.$$

Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang zur Gamma-Funktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

Hinweis: Substituieren Sie in $B(p, q)$ $t := \sin^2 \varphi$ und benutzen Sie im Integral $B(p, q)\Gamma(p + q)$ die Transformationsformel des Integrals beim Übergang zwischen Polar- und euklidischen Koordinaten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Es sei $Z := \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in \mathbb{S}^1, z \in (-1, 1)\}$. Berechnen Sie

$$\int_Z x^2 d\mu_Z(x, y, z).$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{S}^2} x^2 y^2 z^2 d\mu_{\mathbb{S}^2}(x,y,z).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 22.1.2018. bis 12:00**.