Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 22.1.2018
MSc. Th. Körber

---

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Man berechne das Oberflächenintegral mit der Zwiebelformel (Satz 9.6)

$$\int_{B_r(0)} |x|^2 dx,$$

wobei $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

a) Man berechne die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+.$$

b) Man zeige, dass die offene Menge $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ $C^1$ Rand hat, mit dem Subniveaukriterium (2) in Satz 10.1.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Es sei $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ und $r(x) := x^{-\alpha}$ für $x \geq 1$. Zeigen Sie, dass der Rotationskörper $\{(x, y, z) \in [1, \infty) \times \mathbb{R}^2 | y^2 + z^2 \leq (r(x))^2\}$ ein endliches Volumen, aber eine unendliche Oberfläche hat.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Man finde die Darstellung des Laplace-Beltrami Operators bezüglich

(a) der Parametrisierung

$$(0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, (\alpha, \beta) \mapsto ((2 + \cos\alpha)\cos\beta, (2 + \cos\alpha)\sin\beta, \sin\alpha).$$

des 2-Torus $T^2$.

(b) der Parametrisierung $U \to \mathbb{R}^3, x \mapsto (x, f(x))$ des Graphen von $f \in C^2(U)$, falls $U$ in $\mathbb{R}^2$ offen ist.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.* **Abgabe ist am Montag, 29.1.2018. bis 12:00**.