Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 30.10.2017
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei μ ein äußeres Maß auf X. Zeigen Sie

$$\mu(A \triangle B) = 0 \quad \text{impliziert} \quad \mu(A) = \mu(B).$$

Sei weiterhin $(A_i) \subset X$ eine Folge von Mengen. Zeigen Sie

$$\lim_{\imath \to \infty} \mu(A_i \triangle A) = 0 \quad \text{impliziert} \quad \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(A).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X = \mathbb{Q} \cap (0,1]$ und $\mathcal{M}$ das Mengensystem, welches aus allen Mengen der Gestalt $M = \mathbb{Q} \cap (a,b]$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ besteht. Sei $f : \mathcal{M} \to [0,1]$ definiert durch $f(\mathbb{Q} \cap (a,b]) = b - a$. Zeigen Sie, dass f nicht σ-additiv ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{J} := \{(a;b]; a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ der Halbring der links-offenen, rechts-abgeschlossenen Intervalle.
(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine wachsende Funktion (d.h., $F(x) \leq F(y)$ für $x \leq y$). Zeigen Sie, dass durch $I_F((a;b]) := F(b) - F(a)$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{J}$ definiert wird.
(b) Seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsende Funktionen. Zeigen Sie, dass $I_F = I_G$ genau dann, wenn $F - G$ konstant ist.
(c) Sei I ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{J}$ und definiere $F_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_I(x) := \begin{cases} I((0,x]), & \text{für } x \geq 0 \\ -I((x,0]), & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F_I wachsend ist und $I_{F_I} = I$ gilt.
(d) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend. Zeigen Sie $F = F_{I_F} + F(0)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Definition: Sei R ein Ring über X. Falls $X \in \mathcal{R}$ ist, so nennt man R eine Algebra über X. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A} \subset 2^X$ ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra). Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra) ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 6.11 bis 12:00**.