
Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ absolut stetig. Zeigen Sie, dass f $\mathcal{L}^1$-Nullmengen auf $\mathcal{L}^1$-Nullmengen abbildet.
Eine auf einem Intervall $I = [a,b]$ definierte Funktion f heißt absolut stetig*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede endliche Familie paarweiser disjunkter Intervalle (a_k, b_k), $1 \leq k \leq n$, die alle in I enthalten sind und der Bedingung $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ genügen, $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ gilt.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(i) Man zeige: Jede monoton wachsende (oder fallende) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.
(ii) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es sei (f_j) eine Folge der μ-messbaren Funktionen. Man zeige, dass

$$D := \{x \in X\,;\ \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}}\}$$

μ-messbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und f_j, f messbare Funktionen mit $f_j \to f$ μ-fast-überall. Man zeige, dass f_j μ-fast gleichmäßig gegen f konvergent ist, d.h.,

Zu $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A^c) < \delta$, so dass gilt $|f_j(x) - f(x)| < \epsilon$ für $x \in A$ und $j > k$.

Tipp. Man betrachte $D := \{x \in X\,;\ f_j(x) \to f(x)\}$ und $D_k := \{x \in X\,;\ |f_j(x) - f(x)| < \epsilon \text{ für } j \geq k\}$ und verwende die Stetigkeit des Maßes von oben.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare, beschränkte Funktion, und zwar gelte $A \leq f(x) < B$ für alle $x \in X$ mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Sei $A = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = B$ eine Unterteilung des Intervalls $[A, B]$ und $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ eine beliebige Zwischenstelle. Das Symbol

$$\mathcal{Z} := ((t_k)_{0\leq k\leq m}, (\xi_k)_{1\leq k\leq m})$$

bezeichne die Zusammenfassung der Teilpunkte und Zwischenstellen. Dann heißt

$$S(\mathcal{Z}, f) := \sum_{k=1}^{m} \xi_k \cdot \mu(t_{k-1} \leq f < t_k)$$

Lebesguesche Summe der Funktion f bzgl. $\mathcal{Z}$. Die Feinheit (oder Maschenweite) von $\mathcal{Z}$ ist definiert als $\Delta\mathcal{Z} := \max_{1\leq k\leq m}(t_k - t_{k-1})$. Man beweise:

$$\int_X f d\mu = \lim_{\Delta\mathcal{Z}\to 0} S(\mathcal{Z}, f).$$

Vgl. dazu auch den Begriff der Riemannschen Summen in Ana I.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 27.11 bis 12:00**.