Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 4.12.2017
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_n, f \in L^p$. Weiterhin konvergiere $f_n \to f$ fast überall und $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ in L^p gilt.
Tipp: Wenden Sie auf $\varphi_n := 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ das Lemma von Fatou an.

Aufgabe 2 (L^0 *Raum*) (4 Punkte)
Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Den linearen Raum der μ-messbaren, μ-fast überall endlichen Funktionen bezeichen wir mit $\mathcal{L}^0(\mu)$. Für $f, g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ definieren wir die Äquivalenzrelation $f \sim g$, falls $f = g$ μ-fast überall. Dadurch ergeben sich die Restklassen $[f] := \{g \in \mathcal{L}^0(\mu) | g \sim f \text{ auf } \mathcal{L}^0(\mu)\}$. Sei $L^0(\mu) := \mathcal{L}^0(\mu)/\sim$ der Raum der Restklassen.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nun ein endlicher Maßraum. Für $f, g \in L^0(\mu)$ sei

$$d(f,g) := \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $L^0(\mu)$ ist.
(b) Sei $f_n, f \in L^0(\mu)$. Zeigen Sie: $f_n \to f$ im Maß genau dann, wenn $d(f, f_n) \to 0$.
(c) Zeigen Sie, dass $L^0(\mu)$ vollständig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei μ ein Maß auf X und $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie $f \in L^r(\mu)$ für $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ und für $\lambda \in [0,1]$

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_q^{1-\lambda},$$

wobei

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}.$$

Sei nun (X, μ) ein endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass für μ-messbares $f : X \to [0, \infty]$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|f\|_p \leq \liminf_{r \searrow p} \|f\|_r$$

gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Verifizieren sie mittels Differentiation unter dem Integral, dass

$$\int_0^1 s^t \log(s) ds = -\frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{für } t > -1.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 11.12. bis 12:00**.