Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2017/18, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 11.12.2017
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Definition. *In einem Maßraum* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *wird eine Folge messbarer Funktionen* f_n fast gleichmäßig konvergent *gegen eine Funktion* f *genannt, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine Menge* $A \in \mathcal{A}$ *existiert, sodass* $\mu(A) < \varepsilon$ *und* f_n *auf dem Komplement* $\Omega \backslash A$ *gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

Sei μ ein endliches Maß auf X. Seien f_n, f μ-messbar und fast überall endlich und seien f_n fast gleichmäßig konvergent gegen f. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ μ-fast überall.
Bemerkung: Dies ist im gewissen Sinne die Umkehrung des Satz von Egorov.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und es gelte $\int_A f d\mathcal{L}^1 = 0$, für alle messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f = 0$ $\mathcal{L}^1$ fast überall in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f \in L^\infty(X)$. Zeigen Sie:
a) $\|f\|_\infty = \sup\{M\,;\, \mu(\{|f| \geq M\}) \neq 0\}$
b) $\|f\|_\infty = \inf\left\{ \sup_{x \in X} |g(x)|; g = f \text{ fast überall in } X \right\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Definition. *1). Ein normierter Raum* $(X, \|\cdot\|)$ *heißt* separabel, *falls es eine abzählbare, dichte Teilmenge gibt.*
2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Dann heißt* μ separabel, *falls es Mengen* $E_i \in \mathcal{A}$ *für* $i \in \mathbb{N}$ *mit den folgenden Eigenschaften gibt:*
(i) $\mu(E_i) < \infty$ *für* $i \in \mathbb{N}$.
(ii) Für jedes $E \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(E) < \infty$ *und* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $i \in \mathbb{N}$ *mit* $\mu(E \triangle E_i) < \epsilon$.

a) Sei (X, A, μ) ein Maßraum und μ separabel. Zeigen Sie, dass $L^1(\mu)$ separabel ist.
Tipp: Sei S_0 *die Menge der Funktionen der Form* $\sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{E_i}$ *mit* $N \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ *und* E_i *wie in der Definition. Zeigen Sie, dass* S_0 *dicht in der Menge* S *der Funktionen der Form* $\sum_{i=1}^N s_i \chi_{A_i}$ *mit* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $s_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{A}$ *und* $\mu(A_i) < \infty$ *ist. Nutzen Sie* $|\chi_A - \chi_B| \leq |\chi_{A \triangle B}|$.
b) Zeigen Sie, dass λ^n separabel ist. Folgern Sie, dass $L^n(\Omega)$ für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ separabel ist.
Tipp: Approximieren Sie zunächst die offenen Mengen durch geeignete Quader.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 18.12. bis 12:00**.