Elementare Differentialgeometrie

Sommersemester 2006

Prof. Dr. E. Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1 Bogenlänge von Kurven **3**

2 Krümmung von Raumkurven **9**

3 Krümmung und Umlaufzahl ebener Kurven **19**

4 Weitere Resultate für ebene Kurven **31**

5 Die erste Fundamentalform einer Fläche **33**

6 Die zweite Fundamentalform einer Fläche **41**

7 Die Gleichungen $H = 0$ und $K = 0$ **50**

8 Hauptsatz der Flächentheorie **59**

9 Resultate der inneren Geometrie **67**

Vorab: der Euklidische Abstand

In dieser Vorlesung geht es (hauptsächlich) um differenzierbare Kurven und Flächen im Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$, wobei zumeist $n = 3$ oder $n = 2$. Bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ besitzt ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \tag{0.1}$$

so dass das Standardskalarprodukt durch die Formel

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i \, y^i \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n \tag{0.2}$$

gegeben ist. Der Euklidische Abstand ist nun

$$d(x,y) = |x - y| = \sqrt[+]{\langle x - y, x - y \rangle}. \tag{0.3}$$

Mit diesem Abstand ist $\mathbb{R}^n$ metrischer Raum, das heißt es gelten für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ die Regeln

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & \geq & 0, \quad \text{Gleichheit genau wenn } x = y \\ d(x,y) & = & d(y,x) \\ d(x,z) & \leq & d(x,y) + d(y,z). \end{array} \tag{0.4}$$

Definition 0.1 *Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume.*

(1) *$F : X_1 \to X_2$ heißt isometrisch, falls gilt:*

$$d_2\big(F(x_1), F(y_1)\big) = d_1(x_1, y_1) \quad \textit{für alle } x_1, y_1 \in X_1.$$

Die Abbildung F ist dann injektiv.

(2) *Eine isometrische Abbildung $F : X_1 \to X_2$ heißt Isometrie, wenn F surjektiv und damit bijektiv ist.*

Beispiel 0.1 *Jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist metrischer Raum mit dem Euklidischen Abstand*

$$d_A(x,y) = d(x,y) = |x - y| \quad (x, y \in A).$$

Die Inklusionsabbildung $F : (A, d_A) \to (\mathbb{R}^n, d)$ ist dann isometrisch.

Lemma 0.1 *Die Menge der Isometrien eines metrischen Raums (X, d) ist eine Gruppe.*

Beweis: Gemeint ist, dass die Isometrien bzgl. der Verkettung eine Gruppe bilden, das heißt eine Untergruppe der Bijektionen von X. Aber für Isometrien F_1, F_2 von X gilt

$$d\big(F_2^{-1} \circ F_1(x),\, F_2^{-1} \circ F_1(y)\big) = d\big(F_1(x), F_1(y)\big) = d(x,y),$$

das heißt $F_2^{-1} \circ F_1$ ist wieder Isometrie. $\square$

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist

Satz 0.1 (Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n$) *Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ sind die Abbildungen der Form*

$$F(x) = Sx + a \quad \textit{mit } S \in \mathbb{O}(n) \quad \textit{und } a \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildungen nennt man auch Euklidische Bewegungen (rigid motions).

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass jede Abbildung dieser Form isometrisch und surjektiv ist. Sei umgekehrt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie, zunächst mit $F(0) = 0$. Dann folgt

$$|F(x)| = d\big(F(x), 0\big) = d\big(F(x), F(0)\big) = d(x, 0) = |x|.$$

Mit der Polarisationsformel schließen wir, dass F das Skalarprodukt erhält:

$$\begin{aligned} \langle F(x), F(y)\rangle &= -\frac{1}{2}\big(|F(x) - F(y)|^2 - |F(x)|^2 - |F(y)|^2\big) \\ &= -\frac{1}{2}(|x - y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\ &= \langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Ist $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis, so folgt

$$\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

das heißt $F(e_1), \ldots, F(e_n)$ ist wieder eine Orthonormalbasis, und es folgt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle F(x), F(e_i)\rangle\, F(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i F(e_i).$$

Somit ist F eine lineare Abbildung (was ja nicht vorausgesetzt war). Da F das Skalarprodukt erhält, folgt $F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$.

Sei schließlich $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie with $F(0) = a \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Mit $\tau_{-a}(x) = x - a$ folgt dann $(\tau_{-a} \circ F)(0) = 0$, also

$$\tau_{-a} \circ F(x) = Sx \quad \text{für ein } S \in \mathbb{O}(n),$$

beziehungsweise $F(x) = Sx + a$. □

Bemerkung. Die Matrix $S \in \mathbb{O}(n)$ und der Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ sind durch F eindeutig bestimmt, denn es gilt $a = F(0)$ und zum Beispiel $S = DF(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 0.2 *Die Isometrie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = Sx + a$, heißt orientierungserhaltend oder eigentliche Bewegung, falls* $\det S = 1$.

Definition 0.3 *Für $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist der Winkel zwischen x und y definiert durch*

$$\angle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|} \in [0, \pi].$$

1 Bogenlänge von Kurven

In diesem Abschnitt definieren wir die Bogenlänge von Kurven im $\mathbb{R}^n$. Wir gehen dabei von parametrisierten Kurven aus, und diskutieren im Anschluss die Unabhängigkeit von der Wahl der Parametrisierung.

Definition 1.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt parametrisierte Kurve (der Klasse C^k) im $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 1.1 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = p + tv$, wobei $p \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$.
****

Bild 1.1

****
Beachten Sie, dass der Fall $v = 0$, also $c(t) = p$ für alle t, auch zugelassen ist.

Beispiel 1.2 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = r(\cos t, \sin t)$.
Kreis mit Radius $r > 0$
****

Bild 1.2

****

Beispiel 1.3 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (r\cos t, r\sin t, a\,t)$
Schraubenlinie mit Radius $r > 0$, Ganghöhe $2\pi a$
****

Bild 1.3

****

Beispiel 1.4 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin 2t)$

$$\begin{aligned}
c\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (0,0) \\
c'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (-1,-2) \\
c\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= (0,0) \\
c'\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= (1,-2)
\end{aligned}$$

****

Bild 1.4

****

Definition 1.2 *Eine parametrisierte Kurve* $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *heißt* C^k*-geschlossen, falls* c *von der Klasse* C^k *ist und falls gilt:*

$$c^{(j)}(a) = c^{(j)}(b) \quad \textit{für } j = 0, 1, \dots, k.$$

Im Beispiel 1.4 ist $c|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$ zwar C^0-geschlossen, aber nicht C^1-geschlossen. Dagegen ist $c|_{[0,2\pi]}$ sogar C^∞-geschlossen.

Eine Zerlegung Z von $I = [a,b]$ ist ein Tupel $(t_0, \dots, t_N)$ mit $a = t_0 \leq t_1 \dots \leq t_N = b$. Für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})|. \tag{1.1}$$

$L_Z(c)$ ist die Länge des c einbeschriebenen Polygonzugs, der durch Z definiert ist.
****

Bild 1.5

****
In diesem Beispiel ist $N = 5$.

Definition 1.3 *Sei* $I = [a,b]$*. Die Länge der parametrisierten Kurve* $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ *ist*

$$L(c) = \sup_Z L_Z(c) \in [0, \infty].$$

Ist $L(c) < \infty$*, so heißt* c *rektifizierbar.*

Lemma 1.1 *Sei* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *Lipschitzstetig mit Konstante* $\mathrm{Lip}(c) < \infty$*. Dann ist* c *rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) \leq \mathrm{Lip}(c)\, |I|.$$

Beweis: Für eine beliebige Zerlegung Z ist

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq \mathrm{Lip}(c) \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) = \mathrm{Lip}(c)\, |I|.$$

□

Lemma 1.2 *Sei* $\tau \in I = [a,b]$*. Dann gilt für* $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$

$$L(c) = L(c|_{[a,\tau]}) + L(c|_{[\tau,b]}).$$

Beweis: Setze $I_1 = [a, \tau]$ und $I_2 = [\tau, b]$.
„$\Rightarrow$“: Sind Z_1, Z_2 Zerlegungen von I_1 und I_2, so ist (Z_1, Z_2) Zerlegung von I und folglich

$$L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) = L_{(Z_1,Z_2)}(c) \leq L(c).$$

Bildung des Supremums über alle Z_1, Z_2 ergibt

$$L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}) \leq L(c).$$

„$\Rightarrow$": Sei $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Dann gibt es genau ein $r \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\tau \in [t_{r-1}, t_r)$, und wir erhalten die Zerlegungen $Z_1 = (t_0, \ldots, t_{r-1}, \tau)$ von I_1 sowie $Z_2 = (\tau, t_r, \ldots, t_N)$ von I_2. Es folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
L_Z(c) &= \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1} |c(t_i) - c(t_{i-1})| + |c(\tau) - c(t_{r-1})| + |c(t_r) - c(\tau)| + \sum_{i=r+1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \\
&= L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) \\
&\leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}).
\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle Z ergibt

$$L(c) \leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}).$$

□

Satz 1.1 (Bogenlängenformel) *Sei $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann ist c rektifizierbar und es gilt*

$$L(c) = \int_I |c'|.$$

Beweis: Wir können $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ annehmen, denn für stückweise C^1-Kurven verwenden wir dann die C^1-Aussage auf jedem der Teilintervalle und addieren mit Lemma 1.2.

Für jede Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ von $[a,b]$ gilt

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t)\, dt \Big| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)|\, dt = \int_a^b |c'(t)|\, dt.$$

Also ist c rektifizierbar und es folgt

$$L(c) \leq \int_a^b |c'(t)|\, dt. \tag{1.2}$$

Jetzt betrachten wir die *Bogenlängenfunktion* von c

$$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \sigma(t) = L(c|_{[a,t]}), \tag{1.3}$$

und zeigen

$$\sigma'(t) = |c'(t)| \quad \text{für alle } t \in [a,b]. \tag{1.4}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes durch Integration:

$$L(c) = \sigma(b) = \underbrace{\sigma(a)}_{=0} + \int_a^b \sigma'(t)\, dt = \int_a^b |c'(t)|\, dt.$$

Nun folgt aus der Definition der Bogenlänge und (1.2) die Abschätzung

$$\frac{|c(t_2)-c(t_1)|}{t_2-t_1} \le \frac{L(c|_{[t_1,t_2]})}{t_2-t_1} \le \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} |c'(t)|\,dt.$$

Mit $\lambda(t)=\int_a^t |c'(\tau)|\,d\tau$ erhalten wir mit Lemma 1.2

$$\frac{|c(t_2)-c(t_1)|}{t_2-t_1} \le \frac{\sigma(t_2)-\sigma(t_1)}{t_2-t_1} \le \frac{\lambda(t_2)-\lambda(t_1)}{t_2-t_1},$$

und (1.4) ergibt sich mit $t_2 \searrow t_1$ bzw. $t_1 \nearrow t_2$. □

Skizze.
****

Bild 1.6

****
$\sigma(t_2)-\sigma(t_1) \approx |c(t_2)-c(t_1)| \approx |c'(t_1)|\,(t_2-t_1)$.

Grob gesagt besteht eine parametrisierte Kurve aus ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ und einem Fahrplan, wie dieses Bild durchlaufen werden soll. In der Physik spielt der Fahrplan eine wesentliche Rolle – zum Beispiel das 2. Keplersche Gesetz für die Bewegung der Planeten um die Sonne. In der Geometrie ist man gerade an Eigenschaften interessiert, die nicht vom Fahrplan abhängen. Dies soll nun präzisiert werden.

Definition 1.4 *Seien $c_\nu : I_\nu \to \mathbb{R}^n$, $\nu = 1,2$, parametrisierte Kurven. Dann heißt c_2 Umparametrisierung von c_1, falls eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$ existiert, so dass $c_2 = c_1 \circ \varphi$.*

Lemma 1.3 *Auf der Menge aller parametrisierten Kurven c im $\mathbb{R}^n$ ist durch*

$$c_1 \sim c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 \text{ ist Umparametrisierung von } c_1$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Beweis: Zu zeigen ist die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Beachte dazu:

$$\begin{array}{lcrcl} c : I \to \mathbb{R}^n & \Rightarrow & c & = & c \circ \mathrm{id}_I \\ c_2 = c_1 \circ \varphi & \Rightarrow & c_1 & = & c_2 \circ \varphi^{-1} \\ c_2 = c_1 \circ \varphi,\ c_3 = c_2 \circ \psi & \Rightarrow & c_3 & = & c_1 \circ (\varphi \circ \psi). \end{array}$$

Da $\varphi' \neq 0$ und $\psi' \neq 0$, sind φ^{-1} sowie $\varphi \circ \psi$ von der Klasse C^1 mit Ableitung

$$(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(s)\big)} \neq 0, \quad (\varphi \circ \psi)'(s) = \varphi'\big(\psi(s)\big)\,\psi'(s) \neq 0.$$

□

Definition 1.5 *Die Parametertransformation $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ heißt richtungstreu wenn $\varphi' > 0$, und richtungsumkehrend wenn $\varphi' < 0$.*

Lemma 1.4 *Ist c_2 Umparametrisierung von c_1, so folgt $L(c_2) = L(c_1)$.*

BEWEIS: Sei $c_2 = c_1 \circ \varphi$ und $Z = (s_0, \dots, s_N)$ Zerlegung von I_2. Mit $t_i = \varphi(s_i)$ ist $(t_0, \dots, t_N)$ Zerlegung von I, wenn $\varphi' > 0$, bzw. $(t_N, \dots, t_0)$ Zerlegung von I im Fall $\varphi' < 0$. Also gilt

$$L_Z(c_2) = L_Z(c_1 \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{N} |c_1(t_1) - c_1(t_{i-1})| \leq L(c_1).$$

Durch Bilden des Supremums über alle Z folgt $L(c_2) \leq L(c_1)$, und aus Symmetriegründen die Behauptung. □

Bemerkung. Andere Größen, die unter Umparametrisierungen invariant sind:

- das Bild $c(I)$ von c (andere Bezeichnung: Spur von c)
- Anfangs- und Endpunkt $c(a), c(b)$, allerdings nur bzgl. richtungstreuer Parametertransformationen, sonst werden Anfangs- und Endpunkt vertauscht.
- Tangente $\mathbb{R}\, c'(t)$ von c in t. Genauer gilt für $c_2 = c_1 \circ \varphi$

  $$c_2'(s) = c_1'\big(\varphi(s)\big)\, \varphi'(s) \quad \text{mit } \varphi'(s) \neq 0,$$

  also $\mathbb{R}\, c_2'(s) = \mathbb{R}\, c_1'(t) \quad$ für $t = \varphi(s)$.

Im allgemeinen kann eine parametrisierte Kurve c „Singularitäten" haben, selbst wenn $c \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$.

Beispiel 1.5 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2, t^3)$

****

Bild 1.7

****

Definition 1.6 *Eine parametrisierte Kurve $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ heißt regulär, falls*

$$c'(t) \neq 0 \quad \textit{für alle } t \in I.$$

Dieser Begriff ist unter Umparametrisierungen invariant, denn es gilt für $c_2 = c_1 \circ \varphi$

$$c_2'(s) = c_1'\big(\varphi(s)\big)\, \varphi'(s) \quad \text{mit } \varphi'(s) \neq 0.$$

Definition 1.7 *Eine parametrisierte Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls gilt:*

$$|c'(s)| = 1 \quad \textit{für alle } s \in I.$$

Für $[a, b] \subset I$ folgt dann aus Satz 1.1

$$L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b |c'(s)|\, ds = b - a,$$

das heißt eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c bildet längentreu ab. Physikalisch betrachtet wird die Kurve mit der konstanten Absolutgeschwindigkeit $|c'| = 1$ durchlaufen.

Satz 1.2 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve der Klasse C^k mit $k \geq 1$. Dann gibt es eine Parametertransformation $\varphi \in C^k(\widetilde{I}, I)$, so dass $\widetilde{c} = c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Die Parametertransformation kann richtungstreu gewählt werden.*

Beweis: Betrachte für ein $t_0 \in I$ die Bogenlängenfunktion

$$\sigma : I \to \mathbb{R}, \quad \sigma(t) = \int_{t_0}^{t} |c'(\tau)|\, d\tau.$$

Setze $\tilde{I} = \sigma(I)$. Da $\sigma'(t) = |c'(t)| > 0$ nach Voraussetzung, ist $\sigma \in C^k(I, \tilde{I})$ umkehrbar, $\varphi = \sigma^{-1} \in C^k(\tilde{I}, I)$ mit $\varphi' > 0$, und es gilt

$$|(c \circ \varphi)'(s)| = |c'\big(\varphi(s)\big)| \cdot \frac{1}{\sigma'\big(\varphi(s)\big)} = 1.$$

$\square$

Bemerkung. Sind c_1 und $c_2 = c_1 \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt

$$1 = |c_2'(s)| = |c_1'\big(\varphi(s)\big)|\,|\varphi'(s)| = |\varphi'(s)|,$$

also $\varphi(s) = \pm s + s_0$ für ein $s_0 \in \mathbb{R}$. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist also eindeutig, bis auf Verkettung mit einer Isometrie von $\mathbb{R}$.

2 Krümmung von Raumkurven

Definition 2.1 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Die Krümmung von c ist die Funktion*

$$\varkappa : I \to [0, \infty), \quad \varkappa(s) = |c''(s)|.$$

Beispiel 2.1 Die Kurve $c(s) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r})$ ist Bogenlängenparametrisierung eines Kreises mit Radius $r > 0$. Es gilt

$$\varkappa(s) \equiv \frac{1}{r}.$$

Beispiel 2.2 Für $p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ beschreibt $c(s) = p + sv$ eine Gerade. Es folgt $\varkappa(s) \equiv 0$.

Beispiel 2.3 Die Schraubenlinie

$$c(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$$

ist i.a. nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, allerdings ist $|c'(t)| = \sqrt{r^2 + a^2}$ konstant. Wir haben als Bogenlängenfunktion

$$\sigma(t) = \int_0^t |c'(\tau)|\, d\tau = \sqrt{r^2 + a^2}\, t.$$

Mit $L = \sqrt{r^2 + a^2}$ lautet die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = (r \cos \frac{s}{L}, r \sin \frac{s}{L}, a \cdot \frac{s}{L})$ und wir erhalten

$$\varkappa(s) = \frac{r}{r^2 + a^2}.$$

Definition 2.2 *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär. Ein System von Funktionen $v_i \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt begleitendes n-Bein längs c, falls gilt:*

$$v_1 = \frac{c'}{|c'|} \quad \textit{und} \quad \langle v_i(t), v_j(t) \rangle = \delta_{ij} \textit{ für alle } t \in I.$$

****

Bild 2.1

****

Lemma 2.1 *Für $v_1, \ldots, v_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad$ *für* $1 \leq i, j \leq n$.

(2) *Es gibt Funktionen $a_{ij} \in C^0(I)$ mit $a_{ji} = -a_{ij}$, so dass gilt:*

$$v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n \quad \textit{und} \quad \langle v_i(t_0), v_j(t_0) \rangle = \delta_{ij}.$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Da $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasis, gilt $v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_{ij} = \langle v_i', v_j \rangle$, und es folgt

$$a_{ji} = \langle v_j', v_i \rangle = \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=0}{}' - \langle v_j, v_i' \rangle = -a_{ij}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Für die Funktionen $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ gilt $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ und

$$g_{ij}' = \langle v_i', v_j \rangle + \langle v_i, v_j' \rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, v_j \rangle + \langle v_i, \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik} \langle v_j, v_k \rangle + \sum_{k=1}^n a_{jk} \langle v_i, v_k \rangle,$$

das heißt

$$g_{ij}' = \sum_{k=1}^n a_{ik} g_{jk} + \sum_{k=1}^n a_{jk} g_{ik}.$$

Die g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ sind damit Lösungen eines linearen, homogenen System von n^2 Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieses Differentialgleichungssystem wird aber auch durch die konstanten Funktionen δ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, gelöst:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{jk} + \sum_{k=1}^n a_{jk} \delta_{ik} = a_{ij} + a_{ji} = 0 = \delta_{ij}'.$$

Aus der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems folgt $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. □

Definition 2.3 *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ heißt Frenetkurve, falls $\varkappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Das Frenet-Dreibein T, N, B von c ist*

$$\begin{aligned} T &= c' \quad \textit{(Tangentenvektor)} \\ N &= \frac{c''}{|c''|} \quad \textit{(Hauptnormalenvektor)} \\ B &= T \times N \quad \textit{(Binormalenvektor)} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\times$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 2.4 Für die Schraubenlinie ist

$$\begin{aligned} c(s) &= (r \cos \frac{s}{L}, r \sin \frac{s}{L}, a \cdot \frac{s}{L}) \quad \text{mit } L = \sqrt{r^2 + a^2} \\ T(s) &= \frac{1}{L}(-r \sin \frac{s}{L}, r \cos \frac{s}{L}, a) \\ N(s) &= -(\cos \frac{s}{L}, \sin \frac{s}{L}, 0) \\ B(s) &= \frac{1}{L}(a \sin \frac{s}{L}, -a \cos \frac{s}{L}, r) \end{aligned}$$

****

Bild 2.2

****

Definition 2.4 *Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve. Die Torsion von c ist die Funktion*

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle,$$

wobei T, N, B das Frenet-Dreibein von c ist.

Beispiel 2.5 Für die Schraubenlinie ist

$$\tau(s) = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Lemma 2.2 (Frenetgleichungen) *Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcccccc} T' &=& 0 &+& \varkappa N &+& 0 \\ N' &=& -\varkappa N &+& 0 &+& \tau B \\ B' &=& 0 &-& \tau N &+& 0 \end{array}$$

Beweis: Wegen $T = c'$ und $\varkappa = |c''|$ ist $T' = c'' = \varkappa N$, und $\tau = \langle N', B \rangle$ gilt nach Definition 2.4. Da die Matrix nach Lemma 2.1 schiefsymmetrisch sein muss, sind alle Matrixelemente bestimmt. □

Satz 2.1 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisiert.*

(1) *Ist $\varkappa = 0$, so liegt $c(I)$ in einer Geraden.*

(2) *Ist $c \in C^3$ Frenetkurve und $\tau = 0$, so liegt c in einer Ebene.*

Beweis: Ist $\varkappa = 0$, so folgt $c'' = 0$ und somit $c(s) = p + sv$ mit $p, v \in \mathbb{R}^3$, womit (1) gezeigt ist. Unter der Annahme (2) folgt aus den Frenetgleichungen $B' = 0$, also $B(s) \equiv b$ für ein $b \in \mathbb{R}^3$ mit $|b| = 1$. Weiter gilt dann $\langle c, b \rangle' = \langle c', b \rangle \equiv 0$, da $c' = T \perp B$, und hieraus $\langle c, b \rangle = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Damit verläuft c in der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, b \rangle = a\}$. □

Satz 2.2 *Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^4(I, \mathbb{R}^3)$ mit $\varkappa, \tau \neq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$c(I)$ liegt in einer Sphäre.*

(2) $\left(\dfrac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau}\right)' - \dfrac{\tau}{\varkappa} = 0.$

Beweis: Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c mit $\varkappa, \tau \neq 0$ und beliebiges $m \in \mathbb{R}^3$ setze $f(s) = \frac{1}{2}|c(s) - m|^2$ und berechne mit den Frenetgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f' &=& \langle c - m, T \rangle, \\ f'' &=& \varkappa \langle c - m, N \rangle + 1, \\ f''' &=& \varkappa' \langle c - m, N \rangle - \varkappa^2 \langle c - m, T \rangle + \varkappa\tau \langle c - m, B \rangle. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Liegt nun $c(I)$ auf einer Sphäre mit Mittelpunkt m, so ist $f' = f'' = f''' \equiv 0$. Aus (2.1) folgt dann sukzessive $\langle c - m, T \rangle = 0$, $\langle c - m, N \rangle = -1/\varkappa$ und $\langle c - m, B \rangle = \varkappa'/(\varkappa^2 \tau)$, das heißt

$$m = c + \frac{1}{\varkappa} N - \frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau} B. \tag{2.2}$$

Andererseits gilt für jede nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c mit $\varkappa, \tau \neq 0$, wenn m wie in (2.2) definiert ist,

$$m' = \left(\frac{\tau}{\varkappa} - \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau} \right)' \right) B. \tag{2.3}$$

Dabei wurden wieder die Frenetgleichungen benutzt. Unter der Annahme (1) ist $m' = 0$ und somit (2) bewiesen. Aus (2) folgt umgekehrt $m' = 0$ mit m wie in (2.2), und weiter $f' = \langle c - m, T \rangle = 0$ nach Definition von m. Also liegt c auf einer Sphäre. □

Satz 2.3 (Hauptsatz für Raumkurven) *Seien $k \in C^1(I), k > 0$, und $\omega \in C^0(I)$ gegebene Funktionen. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ mit Krümmung $\varkappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Die Kurve c ist eindeutig bestimmt bis auf Anwendung einer orientierungserhaltenden Euklidischen Bewegung.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ zwei solche Kurven, mit zugehörigen Frenetbeinen $\{T, N, B\}$ bzw. $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$. Da die Frenet-Dreibeine positiv orientiert sind, gilt nach einer eigentlichen Bewegung für ein $s_0 \in I$

$$c(s_0) = \tilde{c}(s_0) \quad \text{und} \quad T(s_0), N(s_0), B(s_0) = \tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0), \tilde{B}(s_0).$$

Sowohl T, N, B als auch $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ erfüllen die Frenetgleichungen mit den Koeffizienten $\varkappa = k$ und $\tau = \omega$. Aus der eindeutigen Lösbarkeit der Anfangswertproblems folgt $T, N, B = \tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ und hieraus $c = \tilde{c}$ wegen $c' = T$ bzw. $\tilde{c}' = \tilde{T}$.

Sei nun T, N, B eine C^1-Lösung des Frenetsystems mit Koeffizienten $\varkappa = k$ und $\tau = \omega$ zu den Anfangswerten $T(s_0), N(s_0), B(s_0) = e_1, e_2, e_3$. Eine solche Lösung liefert der generelle Existenzsatz für Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen (Stichwort: Picard-Lindelöf). Da die Koeffizientenmatrix in den Frenetgleichungen schiefsymmetrisch ist, ist T, N, B orthonormal für alle $s \in I$ nach Lemma 2.1. Definiere

$$c \in C^2(I, \mathbb{R}^3),\; c(s) = \int_{s_0}^{s} T(s')\, ds'.$$

Wegen $c' = T$ ist c nach der Bogenlänge parametrisiert und es gilt $c'' = T' = kN$. Also ist N die Hauptnormale sowie $k > 0$ die Krümmung von c. Da $k \in C^1$ nach Voraussetzung und $N \in C^1$, folgt weiter $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$. Nun ist die Orthonormalbasis T, N, B an der Stelle s_0 positiv orientiert und $\det(T, N, B)$ hängt stetig von s ab, also ist B der Binormalenvektor der Kurve c und es folgt $\tau = \langle N', B \rangle = \omega$. □

Die Umparametrisierung nach der Bogenlänge kann in konkreten Fällen oft nicht explizit berechnet werden. Wir wollen deshalb Formeln für die Krümmung und die Torsion herleiten, wenn die Kurve nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Definition 2.5 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Kurve. Ist $\tilde{c} = c \circ \varphi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ richtungstreue Umparametrisierung nach der Bogenlänge, so definieren wir folgende Größen:*

(1) $\varkappa = \tilde{\varkappa} \circ \varphi^{-1}$ *(Krümmung von c),*

(2) $T = \tilde{T} \circ \varphi^{-1}$, $N = \tilde{N} \circ \varphi^{-1}$, $B = \tilde{B} \circ \varphi^{-1}$ *(Frenet-Dreibein längs c für $\varkappa \neq 0$),*

(3) $\tau = \tilde{\tau} \circ \varphi^{-1}$ *(Torsion von c, für $\varkappa \neq 0$ und $c \in C^3$).*

Lemma 2.3 *Die Größen T, N, B sowie $\varkappa, \tau$ in Definition 2.5 sind wohldefiniert, und für beliebige richtungstreue ("+") bzw. richtungsumkehrende ("−") Umparametrisierungen $c_2 = c_1 \circ \varphi$ gelten die Formeln*

$$T_2 = \pm T_1 \circ \varphi, \quad N_2 = N_1 \circ \varphi, \quad B_2 = \pm B_1 \circ \varphi, \tag{2.4}$$

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 \circ \varphi \quad \textit{und} \quad \tau_2 = \tau_1 \circ \varphi. \tag{2.5}$$

Beweis: Die Existenz einer richtungstreuen Umparametrisierung nach der Bogenlänge wurde in Satz 1.2 bewiesen. Sind c_1 und $c_2 = c_1 \circ \varphi$ beide nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\varphi(s) = \pm s + s_0$, vgl. die Bemerkung zu Satz 1.2, und (2.4) und (2.5) ergeben sich direkt. Sind nun $c_i = c \circ \varphi_i$ für $i = 1, 2$ richtungstreue Umparametrisierungen von c nach der Bogenlänge, so ist $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ und es folgt zum Beispiel

$$T_2 \circ \varphi_2^{-1} = (T_1 \circ \varphi) \circ \varphi_2^{-1} = T_1 \circ \varphi_1^{-1}.$$

Analog transformieren sich die anderen Größen, womit die Wohldefiniertheit verifiziert ist. Sei schließlich $c_2 = c_1 \circ \varphi$ eine beliebige Umparametrisierung. Wähle dann richtungstreue Umparametrisierungen $\tilde{c}_i = c_i \circ \varphi_i$ nach der Bogenlänge für $i = 1, 2$. Dann ist $\tilde{c}_2 = \tilde{c}_1 \circ \phi$ mit $\phi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_2$ und folglich $\tilde{T}_2 = \pm \tilde{T}_1 \circ \phi$ bzw.

$$T_2 = \tilde{T}_2 \circ \varphi_2^{-1} = \pm \tilde{T}_1 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi = \pm T_1 \circ \varphi.$$

Wieder kann für $N, B, \varkappa$ und τ analog argumentiert werden, womit das Lemma bewiesen ist. □

Lemma 2.4 *Für eine reguläre Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ berechnen sich Krümmung, Frenet-Dreibein (für $\varkappa \neq 0$) und Torsion (für $\varkappa \neq 0$, $c \in C^3$) wie folgt:*

$$\varkappa = \frac{\big|c'' - \langle c'', T\rangle T\big|}{|c'|^2} = \frac{\big(|c''|^2 - \langle c'', T\rangle^2\big)^{1/2}}{|c'|^2}, \quad \textit{wobei } T = \frac{c'}{|c'|}, \tag{2.6}$$

$$T = \frac{c'}{|c'|}, \quad N = \frac{c'' - \langle c'', T\rangle T}{|c'' - \langle c'', T\rangle T|}, \quad B = \frac{c' \times c''}{|c'|\,|c'' - \langle c'', T\rangle T|}, \tag{2.7}$$

$$\tau = \frac{\det(c', c'', c''')}{|c'|^2\,|c'' - \langle c'', T\rangle T|}. \tag{2.8}$$

Beweis: Wähle eine richtungstreue Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge, also

$$1 = |(c \circ \varphi)'(\varphi^{-1}(t))| = |c'(t)| \frac{1}{(\varphi^{-1})'(t)} \quad \text{bzw. } (\varphi^{-1})'(t) = |c'(t)|.$$

Es folgt

$$T(t) = \tilde{c}'(\varphi^{-1}(t)) = \frac{(\tilde{c} \circ \varphi^{-1})'(t)}{(\varphi^{-1})'(t)} = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}.$$

Weiter gilt

$$\tilde{T}'(\varphi^{-1}(t)) = \frac{(\tilde{T}\circ\varphi^{-1})'(t)}{(\varphi^{-1})'(t)} = \frac{1}{|c'(t)|}\left(\frac{d}{dt}\frac{c'}{|c'|}\right)(t) = \frac{c''(t) - \langle c''(t), T(t)\rangle\, T(t)}{|c'(t)|^2}.$$

Die Frenetgleichungen liefern jedoch $\tilde{T}'(\varphi^{-1}(t)) = \tilde{\varkappa}(\varphi^{-1}(t))\tilde{N}(\varphi^{-1}(t)) = \varkappa(t)\, N(t)$, also

$$\varkappa = \frac{|c'' - \langle c'', T\rangle T|}{|c'|^2} = \frac{\left(|c''|^2 - \langle c'', T\rangle^2\right)^{1/2}}{|c'|^2} \quad \text{und} \quad N = \frac{c'' - \langle c'', T\rangle T}{|c'' - \langle c'', T\rangle T|}.$$

Damit ergibt sich weiter

$$B = \frac{c' \times c''}{|c'||c'' - \langle c'', T\rangle T|}.$$

Nach Definition der Torsion ist

$$\tau(t)) = \langle \tilde{N}'(\varphi^{-1}(t)), \tilde{B}(\varphi^{-1}(t))\rangle = \left\langle \frac{(\tilde{N}\circ\varphi^{-1})'(t)}{(\varphi^{-1})'(t)}, \tilde{T}(\varphi^{-1}(t)) \times \tilde{N}(\varphi^{-1}(t))\right\rangle,$$

und schließlich folgt wegen $T' = |c'|\,\tilde{T}'\circ\varphi^{-1} = |c'|\varkappa N$

$$\tau = \frac{1}{|c'|}\left\langle \frac{d}{dt}\frac{c'' - \langle c'', T\rangle T}{|c'' - \langle c'', T\rangle T|}, T \times N\right\rangle = \frac{\langle c''', T\times N\rangle}{|c'||c'' - \langle c'', T\rangle T|} = \frac{\langle c' \times c'', c'''\rangle}{|c'|^2\,|c'' - \langle c'', T\rangle T|}.$$

□

Lemma 2.5 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Kurve und $F(x) = Sx + a$ eine Euklidische Bewegung. Dann ist $\tilde{c} = F \circ c$ ebenfalls regulär und es gilt mit* $\det(S) = \pm 1$

(1) $\tilde{\varkappa} = \varkappa$.

(2) $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B} = ST, SN, \pm SB$.

(3) $\tilde{\tau} = \pm\tau$.

Beweis: Wir können nach Lemma 2.3 annehmen, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Es gilt $(F \circ c)' = Sc'$ sowie $(F \circ c)'' = Sc''$. Da $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^3)$, folgt $\tilde{\varkappa} = \varkappa$ sowie $\tilde{T} = ST$. Mit c ist auch $\tilde{c}$ Frenetkurve, und es gilt $\tilde{N} = SN$ sowie

$$\tilde{B} = (ST) \times (SN) = \pm S(T \times N) = \pm SB.$$

Schließlich folgt $\tilde{\tau} = \langle \tilde{N}', \tilde{B}\rangle = \pm\langle SN', SB\rangle = \pm\tau$. □

Als Anwendung wollen wir jetzt eine lokale Entwicklung für die Graphendarstellung einer Kurve herleiten. Nach einer orientierungserhaltenden Isometrie können wir annehmen, dass $c(0) = 0$ und

$$T(0), N(0), B(0) = e_1, e_2, e_3.$$

Es gibt dann lokal eine Umparametrisierung der Form $c(x) = (x, u(x))$ für $x \in (-\delta, \delta)$, wobei $u : (-\delta, \delta) \to \operatorname{Span}\{e_2, e_3\}$ mit $u(0) = 0$ *. Damit gilt

$$c' = (1, u'), \quad c'' = (0, u''), \quad c''' = (0, u'''),$$

*Übungsaufgabe

und wir erhalten aus unseren Formeln

$$T = \frac{(1,u')}{\sqrt{1+|u'|^2}} \quad \Rightarrow \quad u'(0) = 0.$$

Weiter berechnen wir

$$\varkappa = \frac{\big((1+|u'|^2)|u''|^2 - \langle u', u''\rangle^2\big)^{1/2}}{(1+|u'|^2)^{3/2}},$$

und schließen in $x = 0$

$$\varkappa(0) = |u''(0)| \quad \text{sowie} \quad e_2 = N(0) = \frac{c''(0)}{|c''(0)|} = \frac{u''(0)}{\varkappa(0)}.$$

Außerdem folgt durch Differentiation

$$\varkappa'(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa(0)}\, 2\langle u''(0), u'''(0)\rangle = \langle u'''(0), e_2\rangle.$$

Schließlich

$$\tau(0) = \frac{\det(e_1, \varkappa(0)e_2, u'''(0))}{\varkappa(0)^2} = \frac{\langle u'''(0), e_3\rangle}{\varkappa(0)}.$$

Daraus ergibt sich für $c(x)$ folgende Taylorentwicklung:

$$c(x) = xe_1 + \frac{x^2}{2}\varkappa(0)\, e_2 + \frac{x^3}{6}\big(\varkappa'(0)\, e_2 + \varkappa(0)\, \tau(0)\, e_3\big) + o(|x|^3).$$

Im Fall $\tau(0) > 0$ sieht die Kurve wie folgt aus:
****

Bild 2.4

*********************************** ***********************************

Bild 2.5

****

Wir wollen nun einen etwas tieferliegenden Satz für Kurven im $\mathbb{R}^3$ besprechen. Grob gesagt geht es um die Frage, wieviel Krümmung gebraucht wird, damit eine Kurve sich schließt.

Satz 2.4 (Ungleichung von Fenchel) *Sei $c : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^2-geschlossen. Dann gilt*

$$\int_0^L \varkappa(s)\, ds \geq 2\pi.$$

Bei Gleichheit ist c eine ebene, einfach geschlossene Kurve, die ein konvexes Gebiet berandet.

Wir benötigen dazu folgendes Resultat, das auch für sich betrachtet von Interesse ist.

Satz 2.5 (Bogenabstand auf $\mathbb{S}^2$) *Für eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ gilt*

$$L(\gamma) \geq \angle\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) \in [0,\pi].$$

Bei Gleichheit durchläuft γ ohne Richtungsumkehr einen Großkreisbogen von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$.

Zwei Punkte p, q auf $\mathbb{S}^2$ mit $0 < \angle(p, q) < \pi$ spannen eine Ebene auf, die die Sphäre in einem Großkreis schneidet. Durch die Punkte wird der Kreis in zwei Bögen zerlegt. Der kürzere dieser Bögen ist der eindeutig bestimmte Großkreisbogen zwischen p und q mit Länge strikt kleiner als π. Im Fall $\angle(p, q) = \pi$ gibt es dagegen unendlich viele Meridiane der Länge π, die p und q verbinden.

Beweis: (von Satz 2.5) Wir betrachten die stetige Funktion

$$\theta : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to [-\pi/2, \pi/2],\ \theta(x) = \arccos \Big\langle \frac{x}{|x|}, e_3 \Big\rangle.$$

Für $x \in S^2 \backslash \{\pm e_3\}$ berechnen wir

$$D\theta(x) = -\frac{e_3 - \langle x, e_3 \rangle x}{\sqrt{1 - \langle x, e_3 \rangle^2}},$$

insbesondere gilt

$$(2.9) \qquad |D\theta(x)| = 1 \quad \text{sowie} \quad \langle D\theta(x), x \rangle = 0,\ \langle D\theta(x), e_3 \rangle < 0 \quad \text{für alle } x \in S^2 \backslash \{\pm e_3\}.$$

****

Bild 2.6

****

Nach Rotation ist o. B. d. A. $\gamma(a) = e_3$. Mit $\varrho = \theta(\gamma(b))$ gelte zunächst zusätzlich

$$(2.10) \qquad 0 < \theta(\gamma(t)) < \varrho \quad \text{für alle } t \in (a, b).$$

Dann folgt aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\, \theta\big(\gamma(t)\big) = \langle D\theta\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \rangle \quad \text{für alle } t \in (a, b).$$

Wir integrieren von a bis b und schätzen mit Cauchy-Schwarz und (2.9) ab:

$$\angle(\gamma(a), \gamma(b)) = \varrho = \int_a^b \langle D\theta(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = L(\gamma).$$

Bei Gleichheit folgt $\gamma'(t) = \lambda(t)\, D\theta\big(\gamma(t)\big)$ mit $\lambda(t) \geq 0$, also $\lambda(t) = |\gamma'(t)|$. Sei nun $\theta_0 \in (0, \varrho)$ beliebig. Dann gibt es ein $t_0 \in (a, b)$ mit $\gamma(t_0) = (\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0)$, nach evtl. Drehung um die e_3-Achse. Aus der bewiesenen Abschätzung folgt

$$L(\gamma|_{[a,t_0]}) = L(\gamma) - L(\gamma|_{[t_0,b]}) \leq \varrho - (\varrho - \theta_0) = \theta_0,$$

das heißt $L(\gamma|_{[a,t_0]}) = \theta_0$ und $L(\gamma|_{[t_0,b]}) = \varrho - \theta_0$. Wir betrachten die Funktion

$$\sigma : [a, b] \to [0, \varrho], \quad \sigma(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau.$$

Mit $\tilde{\gamma}(s) = (\sin s, 0, \cos s)$, $s \in (0, \pi)$, gilt $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$, $\langle \tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}(s) \rangle = 0$ und $\langle \tilde{\gamma}'(s), e_3 \rangle < 0$. Wegen (2.9) und $\tilde{\gamma}'(s), D\theta(\tilde{\gamma}(s)) \in \mathrm{Span}\{e_1, e_3\}$ folgt $\tilde{\gamma}'(s) = D\theta(\tilde{\gamma}(s))$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\tilde{\gamma} \circ \sigma)'(t) &= \tilde{\gamma}'\big(\sigma(t)\big)\, \sigma'(t) = \lambda(t)\, D\theta\big((\tilde{\gamma} \circ \sigma)(t)\big), \\
(\tilde{\gamma} \circ \sigma)(t_0) &= (\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0) = \gamma(t_0).
\end{aligned}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem folgt $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}\big(\sigma(t)\big)$ für $t \in [a,b]$, womit die zweite Aussage gezeigt ist.

Ohne die Annahme (2.10) betrachten wir ein maximales Intervall $[t_1,t_2] \subset [a,b]$ mit $0 < \theta\big(\gamma(t)\big) < \varrho$ für alle $t \in (t_1,t_2)$. Die Aussagen folgen dann zunächst für $\gamma|_{[t_1,t_2]}$, insbesondere ist $L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[t_1,t_2]}) \geq \varrho$. Im Gleichheitsfall muss γ auf $[a,t_1]$ bzw. $[t_2,b]$ konstant sein. Damit ist der Satz bewiesen. □

Lemma 2.6 *Sei* $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ *eine geschlossene, stückweise* C^1*-Kurve mit Länge* $L(\gamma) \leq 2\pi$ (bzw. sogar $L(\gamma) < 2\pi$). *Dann liegt* γ *komplett in einer Halbsphäre, das heißt es gibt ein* $e \in \mathbb{S}^2$ *mit* $\langle \gamma(t), e\rangle \geq 0$ (bzw. sogar $\langle \gamma(t), e\rangle > 0$) *für alle* $t \in [a,b]$.

Beweis: Wähle ein $\tau \in (a,b)$ mit $L(\gamma|_{[a,\tau]}) = L(\gamma|_{[\tau,b]}) = L(\gamma)/2$, und setze $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(\tau)$. Ist $\angle(p,q) = \pi$, so gilt $L(\gamma) = 2\pi$ nach Satz 2.5 und $\gamma|_{[a,\tau]}$ bzw. $\gamma|_{[\tau,b]}$ parametrisieren Halb-Großkreise von p nach q. Man kann dann für e eine der Normalen der zugehörigen Ebenen wählen.

****

Bild 2.7

****

Ab jetzt sei $\angle(p,q) < \pi$. Wähle für e den Mittelpunkt des kürzeren Großkreisbogens von p nach q. Nach Drehung können wir annehmen, dass $e = e_3$ und somit $(q^1,q^2,q^3) = (-p^1,-p^2,p^3)$, wobei $p^3 > 0$. Nun ist entweder $\langle \gamma(t), e_3\rangle > 0$ für $0 \leq t \leq \tau$, oder es gibt ein $t_0 \in (a,\tau)$ mit

$$\langle \gamma(t_0), e_3\rangle = 0.$$

Im zweiten Fall betrachten wir mit $S(x^1,x^2,x^3) = (x^1,x^2,-x^3)$ die Kurve

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } a \leq t \leq t_0 \\ S\gamma(t) & \text{für } t_0 \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

****

Bild 2.8

****

$\tilde{\gamma}$ ist stückweise C^1 und verbindet p mit $S(q) = -p$, also folgt aus Satz 2.5

$$L(\gamma) = 2L(\gamma|_{[a,\tau]}) = 2L(\tilde{\gamma}) \geq 2\pi.$$

Außerdem liefert die Gleichheitsdiskussion von Satz 2.5, dass $\tilde{\gamma}$ einen Halb-Großkreis von p nach $S(q) = -p$ durchläuft. Es folgt

$$\langle \tilde{\gamma}(t), e_3\rangle \geq 0 \text{ für } t \in [a,t_0] \quad \text{sowie} \quad \langle \tilde{\gamma}(t), e_3\rangle \leq 0 \text{ für } t \in [t_0,b],$$

und hieraus $\langle \gamma(t), e_3\rangle \geq 0$ für alle $t \in [a,\tau]$. Da wir für $\gamma|_{[\tau,b]}$ analog argumentieren können, ist das Lemma gezeigt. □

Beweis: (der Fenchel-Ungleichung)
Sei $c : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ C^2-geschlossen mit $|c'| = 1$. Dann ist

$$\gamma : [0,L] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad \gamma(s) = c'(s)$$

geschlossene C^1-Kurve. Für $e \in S^2$ gilt

$$\int_0^L \langle \gamma(s), e \rangle \, ds = \int_0^L \frac{d}{ds} \langle c(s), e \rangle \, ds = \big[\langle c(s), e \rangle\big]_{s=0}^{s=L} = 0. \tag{2.11}$$

Also gibt es kein $e \in S^2$ mit $\langle \gamma(s), e \rangle > 0$ für alle s, und nach Lemma 2.6 folgt

$$\int_0^L \varkappa(s) \, ds = \int_0^L |\gamma'(s)| \, ds = L(\gamma) \geq 2\pi.$$

Wenn in dieser Abschätzung Gleichheit eintritt, so wählen wir mit Lemma 2.6 ein $e \in S^2$ mit $\langle \gamma(s), e \rangle \geq 0$ für alle $s \in [0,L]$. Aber dann folgt wegen (2.11)

$$\frac{d}{ds} \langle c(s), e \rangle = \langle \gamma(s), e \rangle \equiv 0,$$

und $c(I)$ liegt in einer Ebene $\langle x, e \rangle = \text{const}$. Jetzt zeigen wir, dass c einfach geschlossen ist. Angenommen es gibt $\tau \in (0,L)$ mit $c(\tau) = c(0)$. Wäre $L(\gamma|_{[0,\tau]}) \leq \pi$, so wählen wir $\sigma \in (0,\tau)$ mit $L(\gamma|_{[0,\sigma]}) = L(\gamma|_{[\sigma,\tau]}) \leq \frac{\pi}{2}$, und schließen für $e = \gamma(\sigma)$ mit Satz 2.5

$$\langle \gamma(s), e \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } s \in [0,\tau].$$

Andererseits gilt

$$\int_0^\tau \langle \gamma(s), e \rangle \, ds = \big[\langle c(s), e \rangle\big]_{s=0}^{s=\tau} = 0,$$

also $\langle \gamma(s), e \rangle \equiv 0$. Aber $\{x \in S^1 : \langle x, e \rangle = 0\}$ besteht nur aus zwei Punkten und γ ist stetig. Damit ist γ konstant auf $[0,\tau]$ und $c(0) \neq c(\tau)$, ein Widerspruch. Wir folgern

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[0,\tau]}) + L(\gamma|_{[\tau,b]}) > \pi + \pi = 2\pi,$$

im Widerspruch zur Annahme. Also ist im Gleichheitsfall c eine einfach geschlossenene, ebene Kurve. Die verbleibende Behauptung, dass c ein konvexes Gebiet berandet, werden wir im nächsten Kapitel beweisen. $\square$

3 Krümmung und Umlaufzahl ebener Kurven

Die Drehung um den Winkel $\pi/2$ im $\mathbb{R}^2$ ist die lineare Abbildung $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$Je_1 = e_2, Je_2 = -e_1 \quad \text{bzw.} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Es gilt $J^2 = -\mathrm{Id}$ und $\langle Jv, w \rangle = \det(v, w)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Im folgenden werden wir oft $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ identifizieren, und bzgl. dieser Identifikation gilt $Jz = iz$ für $i = \sqrt{-1}$.

Lemma 3.1 *Sei $c \in C^k(I, \mathbb{R}^2)$, $k \geq 1$, nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\nu \in C^{k-1}(I, \mathbb{R}^2)$, so dass c', ν ein positiv orientiertes 2-Bein längs c ist.*

Beweis: Wähle $\nu = Jc'$. Die Eindeutigkeit ist klar. □

Im folgenden bezeichnet ν stets die durch Lemma 3.1 definierte Normale.

Definition 3.1 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Die (orientierte) Krümmung von c ist die Funktion*

$$\varkappa : I \to \mathbb{R}, \quad \varkappa(s) = \langle c''(s), \nu(s) \rangle.$$

Um das Vorzeichen der Krümmung zu interpretieren, betrachte die offenen Halbebenen

$$\begin{aligned} E^+ &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z - c(s_0), \nu(s_0) \rangle > 0\} \\ E^- &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z - c(s_0), \nu(s_0) \rangle < 0\} \end{aligned}$$

Mit $h(s) = \langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0) \rangle$ gilt

$$h(s) > 0 \ \text{(bzw. } h(s) < 0) \quad \Leftrightarrow \quad c(s) \in E^+ \ \text{(bzw. } c(s) \in E^-).$$

Berechne nun $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = \langle c'(s_0), \nu(s_0) \rangle = 0$ und weiter

$$h''(s_0) = \langle c''(s_0), \nu(s_0) \rangle = \varkappa(s_0) \quad \Rightarrow \quad h(s_0) = \frac{1}{2}\varkappa(s_0)(s - s_0)^2 + o(|s - s_0|^2),$$

das heißt es gilt

$$\begin{aligned} \varkappa(s_0) > 0 \ &\Rightarrow \ c(s) \in E^+ \text{ für } s \text{ nahe } s_0 \quad \text{(Linkskurve)} \\ \varkappa(s_0) < 0 \ &\Rightarrow \ c(s) \in E^- \text{ für } s \text{ nahe } s_0 \quad \text{(Rechtskurve)} \end{aligned}$$

****

Bild 3.1

****

Lemma 3.2 *Sei $F(z) = Sz + a$ mit $S \in \mathbb{O}(2)$, $a \in \mathbb{R}^2$, und sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann folgt für $\tilde{c} = F \circ c$*

$$\tilde{\nu} = \pm S\nu \quad \textit{und} \quad \tilde{\varkappa} = \pm\varkappa, \quad \textit{wobei } \det(S) = \pm 1.$$

Beweis: Zunächst gilt $|\tilde{c}'| = |Sc'| = |c'| = 1$, das heißt $\tilde{c}$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Weiter folgt $\langle \tilde{c}', S\nu \rangle = \langle Sc', S\nu \rangle = \langle c', \nu \rangle = 0$, $|S\nu| = |\nu| = 1$ sowie

$$\det(\tilde{c}', S\nu) = \det(Sc', S\nu) = (\det S) \det(c', \nu) = \pm 1.$$

Nach Lemma 3.1 folgt $\tilde{\nu} = \pm S\nu$ und dann

$$\tilde{\varkappa} = \langle \tilde{c}'', \tilde{\nu} \rangle = \pm \langle Sc'', S\nu \rangle = \pm \varkappa.$$

□

Lemma 3.3 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gelten für $\tau = c'$ und $\nu = Jc'$ die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \tau' &= 0 + \varkappa \nu \\ \nu' &= -\varkappa \tau + 0 \end{aligned}$$

Beweis: Die erste Gleichung gilt wegen $\langle \tau', \tau \rangle = \langle c'', c' \rangle = \frac{1}{2} \langle c', c' \rangle' = 0$, und per Definition von $\varkappa$, die zweite folgt aus der Schiefsymmetrie nach Lemma 2.1. □

Sei nun γ eine geschlossene Kurve, die einen gegebenen Punkt p nicht trifft. Unser Ziel ist zu zählen, wie oft γ den Punkt p umläuft. Auch wenn der Begriff der Umlaufzahl anschaulich ganz klar sein dürfte, benötigt die mathematische Fassung etwas Aufwand. Im folgenden ust $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$ und $C^0(I, \mathbb{S}^1) = \{\omega \in C^0(I, \mathbb{R}^2) : |\omega(t)| = 1 \text{ für alle } t \in I\}$.

Definition 3.2 *Sei $\omega \in C^0(I, \mathbb{S}^1)$. Eine Funktion $\theta \in C^0(I)$ heißt Lift von ω, falls gilt:*

$$\omega(t) = e^{i\theta(t)} \quad \textit{für alle } t \in I.$$

****

Bild 3.2

****

Satz 3.1 (Liftung von Kurven) *Sei $\omega \in C^0(I, \mathbb{S}^1)$ gegeben, und für ein $t_0 \in I$ sei $\theta_0 \in \mathbb{R}$ gewählt mit $\omega(t_0) = e^{i\theta_0}$. Dann gibt es genau einen Lift $\theta \in C^0(I)$ von ω mit $\theta(t_0) = \theta_0$. Ist zusätzlich $\omega \in C^k(I, \mathbb{R}^2)$, so folgt $\theta \in C^k(I)$.*

Beweis: Wir zeigen als erstes die Eindeutigkeit. Sind $\theta_{1,2} \in C^0(I)$ Lifts von ω, so gilt $\theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ für alle $t \in I$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $\theta_1 - \theta_2 \equiv 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Ist zusätzlich $\theta_1(t_0) = \theta_2(t_0)$, so folgt $k = 0$ und somit $\theta_1 = \theta_2$.

Jetzt zeigen wir die Existenz unter der Annahme, dass ω stückweise C^1 ist. Wäre die Funktion θ schon gefunden, so hätten wir durch Differentiation der Gleichung $\omega = e^{i\theta}$

$$\omega' = i\theta' e^{i\theta} = \theta' i\omega \quad \text{bzw.} \quad \theta' = \frac{1}{i} \frac{\omega'}{\omega},$$

und durch Integration von t_0 bis t folgte die Formel

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^{t} \frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)}\, d\tau. \tag{3.2}$$

Aber durch (3.2) wird tatsächlich der gewünschte Lift definiert, denn es folgt $\theta(t_0) = \theta_0$ sowie

$$(e^{-i\theta}\omega)' = -i\theta' e^{-i\theta}\omega + e^{-i\theta}\omega' = e^{-i\theta}(\omega' - i\theta'\omega) = 0,$$

also $e^{-i\theta(t)}\omega(t) = e^{-i\theta(t_0)}\omega(t_0) = e^{-i\theta_0}\omega(t_0) = 1$. Ist ω von der Klasse C^k, so auch θ nach (3.2).

Um die Existenz des Lifts auch dann zu zeigen, wenn ω nur stetig ist, wollen wir ω durch stückweise C^1-Abbildungen approximieren. Wir müssen dann sicherstellen, dass auch die zugehörigen Lifts konvergieren. Dies leistet das folgende Lemma, das auch für die Homotopieinvarianz der Umlaufzahl wesentlich ist.

Lemma 3.4 *Seien* $\omega_{1,2} = e^{i\theta_{1,2}} \in C^0(I, \mathbb{S}^1)$ *mit*

(1) $|\omega_1(t) - \omega_2(t)| \leq \varepsilon$ *für alle* $t \in I$, *wobei* $0 \leq \varepsilon < 2$,

(2) $|\theta_1(t_0) - \theta_2(t_0)| \leq \pi$ *für ein* $t_0 \in I$,

Dann folgt

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)| \leq \frac{\pi}{2}\,\varepsilon \quad \textit{für alle } t \in I.$$

Beweis: Wir verwenden die Abschätzung

$$|\vartheta| \leq \pi \quad \Rightarrow \quad |\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}\,|e^{i\vartheta} - 1| \tag{3.3}$$

****

Bild 3.3

****

Wegen $\sin'' = -\sin \leq 0$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist die Sinusfunktion konkav auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ und damit

$$|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x| \quad \text{für } x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Für $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ folgt hieraus

$$|e^{i\vartheta} - 1| = 2\,|\sin\frac{\vartheta}{2}| \geq \frac{2}{\pi}|\vartheta|,$$

womit (3.3) gezeigt ist. Setze nun $\theta = \theta_1 - \theta_2$, also nach Voraussetzung

$$|e^{i\theta(t)} - 1| = |e^{i\theta_1(t)} - e^{i\theta_2}(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I.$$

Wegen $\varepsilon < 2$ ist $\theta(t) \notin \{k\pi : k \text{ ungerade }\}$. Da $|\theta(t_0)| \leq \pi$, folgt erst $|\theta(t_0)| < \pi$ und dann $\theta(t) < \pi$ für alle $t \in I$ nach dem Zwischenwertsatz, und somit nach (3.3)

$$|\theta(t)| \leq \frac{\pi}{2}|e^{i\theta(t)} - 1| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon.$$

$\square$

Als zweite Hilfsaussage benötigen wir natürlich die Existenz einer geeigneten Approximation.

Lemma 3.5 *Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall. Dann gibt es zu jedem $\omega \in C^0(I,\mathbb{S}^1)$ eine Folge von stückweise C^1-Abbildungen $\omega_k(I,\mathbb{S}^1)$, so dass $\|\omega_k - \omega\|_{C^0} \to 0$ mit $k \to \infty$.*

Beweis: Es reicht, eine Folge von stückweise C^1-Abbildungen $\omega_k : I \to \mathbb{R}^2$ zu finden mit $\|\omega_k - \omega\|_{C^0} \to 0$. Denn für k groß folgt dann $|\omega_k| \geq |\omega| - |\omega_k - \omega| \geq \frac{1}{2}$, das heißt die Abbildungen $\omega_k/|\omega_k|$ sind stückweise C^1 und erfüllen

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\omega_k}{|\omega_k|} - \omega\Big| &\leq \Big|\frac{\omega_k}{|\omega_k|} - \frac{\omega}{|\omega_k|}\Big| + \Big|\frac{\omega}{|\omega_k|} - \omega\Big| \\
&\leq \frac{1}{|\omega_k|}\,|\omega_k - \omega| + \frac{\big||\omega| - |\omega_k|\big|}{|\omega_k|} \\
&\leq 4\,\|\omega_k - \omega\|_{C^0} \to 0.
\end{aligned}$$

Für die Approximation in $\mathbb{R}^2$ gibt es mehrere Möglichkeiten, wir verwenden eine stückweise lineare Interpolation. Setze $\tau = (b-a)/k$ und $t_j = a + j\tau$ für $j = 0,1,\ldots,k$, und definiere

$$\omega_k : [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ \omega_k(t) = \frac{t_j - t}{\tau}\omega(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{\tau}\omega(t_j) \qquad \text{für } t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Es folgt dann für $t \in [t_{j-1}, t_j]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\omega_k(t) - \omega(t)| &\leq \frac{t_j - t}{\tau}|\omega(t_{j-1}) - \omega(t)| + \frac{t - t_{j-1}}{\tau}|\omega(t_j) - \omega(t)| \\
&\leq \max_{|t-t'|\leq 1/k} |\omega(t) - \omega(t')|.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite geht gegen Null mit $k \to \infty$, da ω auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist. □

Beweis von Satz 3.1 *(Fortsetzung)* Wähle $\omega_k : I \to \mathbb{S}^1$ stückweise C^1 mit $\|\omega_k - \omega\|_{C^0} \to 0$. Wie bereits gezeigt, besitzt ω_k einen Lift $\theta_k \in C^0(I)$, und zwar o. B. d. A. mit $|\theta_k(t_0) - \theta_0| \leq \pi$. Da

$$|e^{i(\theta_k(t_0) - \theta_0)} - 1| = |\omega_k(t_0) - \omega(t_0)| \to 0,$$

gilt sogar $\theta_k(t_0) \to \theta_0$ nach (3.3). Aber nun liefert Lemma 3.4

$$\|\theta_k - \theta_l\|_{C^0} \to 0 \qquad \text{mit } k,l \to \infty.$$

Da $C^0(I)$ vollständig ist, gilt $\theta_k \to \theta$ mit $\theta \in C^0(I)$, und durch Grenzübergang folgen die gewünschten Eigenschaften $\theta(t_0) = \theta_0$ und $e^{i\theta} = \omega$. □

Definition 3.3 (Umlaufzahl) *Sei $I = [a,b]$ und $\gamma \in C^0(I,\mathbb{R}^2)$ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$. Die Umlaufzahl von γ um den Punkt $p \notin \gamma(I)$ ist definiert durch*

$$n(\gamma,p) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(a)\big) \in \mathbb{Z}.$$

Dabei ist $\theta \in C^0(I)$ ein beliebiger Lift der Abbildung

$$\omega : I \to \mathbb{S}^1, \quad \omega(t) = \frac{\gamma(t) - p}{|\gamma(t) - p|}.$$

Ein Lift θ existiert nach Satz 3.1, und je zwei Lifts unterscheiden sich nur um eine additive Konstante, die sich bei der Differenzbildung in Definition 3.3 heraushebt. Deshalb ist die Umlaufzahl wohldefiniert, und ganzzahlig wegen $e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)}$.

Lemma 3.6 (Invarianz der Umlaufzahl bei Umparametrisierungen) *Sei* $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$, *wobei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$, $\sigma : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ *stetig, und* $\sigma(\alpha) = a$, $\sigma(\beta) = b$. *Dann gilt*

$$n(\tilde{\gamma}, p) = n(\gamma, p).$$

Beweis: Ist $\theta \in C^0([a,b])$ ein Lift von $(\gamma - p)/|\gamma - p|$, so ist $\tilde{\theta} = \theta \circ \sigma \in C^0([\alpha, \beta])$ ein Lift von $(\tilde{\gamma} - p)/|\tilde{\gamma} - p|$, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 3.7 (Invarianz der Umlaufzahl unter Bewegungen) *Sei* $\gamma \in C^0(I, \mathbb{R}^2 \backslash \{p\})$ *geschlossene Kurve, und* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(z) = Sz + b$, *für* $S \in \mathbb{O}(2)$ *und* $b \in \mathbb{R}^2$. *Dann gilt für* $\det(S) = \pm 1$

$$n(\tilde{\gamma}, \tilde{p}) = \pm n(\gamma, p) \quad \text{mit } \tilde{\gamma} = F \circ \gamma,\ \tilde{p} = F(p).$$

Beweis: Für die zugehörigen Abbildungen $\omega, \tilde{\omega} : I \to \mathbb{S}^1$ wie in Definition 3.3 berechnet man $\tilde{\omega} = S\omega$. Sei $\theta \in C^0(I)$ ein Lift von ω. Ist $S \in \mathbb{SO}(2)$, so gilt $Sz = e^{i\alpha} z$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\theta + \alpha$ ist ein Lift von $\tilde{\omega}$, also folgt $n(\tilde{\gamma}, \tilde{p}) = n(\gamma, p)$. Ist $Sz = \overline{z}$, so ist $-\theta$ ein Lift von $\tilde{\omega}$, und somit $n(\tilde{\gamma}, \tilde{p}) = -n(\gamma, p)$. □

Satz 3.2 (Integralformel für die Umlaufzahl) *Für eine geschlossene, stückweise* C^1-*Kurve* $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{C} \backslash \{p\}$ *gilt*

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p}\, dt.$$

Beweis: Setze $r(t) = |\gamma(t) - p|$, also $\omega(t) = (\gamma(t) - p)/r(t)$ und somit nach (3.2)

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p} - \frac{r'(t)}{r(t)} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p},$$

wobei zuletzt $r(a) = r(b)$ benutzt wurde. □

Wir bemerken am Rande, dass das Integral aus Satz 3.2 als komplexes Kurvenintegral aufgefasst werden kann, genauer gilt

$$n(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - p}.$$

Wegen der Ganzzahligkeit erwarten wir, dass sich die Umlaufzahl $n(\gamma, p)$ bei stetigen Deformationen der Kurve γ in $\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$ nicht ändert.

Definition 3.4 *Sei* $A \subset \mathbb{R}^2$. *Zwei stetige, geschlossene Kurven* $\gamma_0, \gamma_1 : I = [a,b] \to A$ *heißen in* A *homotop, wenn es eine Abbildung* $h \in C^0([0,1] \times I, A)$ *gibt mit*

$$h(0, \cdot) = \gamma_0,\ h(1, \cdot) = \gamma_1 \quad \text{und} \quad h(s,a) = h(s,b) \text{ für alle } s \in [0,1].$$

h heißt Homotopie von γ_0 nach γ_1 in A.

Satz 3.3 (Homotopieinvarianz der Umlaufzahl) *Sind die stetigen, geschlossenen Kurven* $\gamma_0, \gamma_1 : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{p\})$ *in* $\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$ *homotop, so gilt*

$$n(\gamma_0, p) = n(\gamma_1, p).$$

BEWEIS: Wähle eine Homotopie $h \in C^0([0,1] \times I, \mathbb{R}^2 \backslash \{p\})$ von γ_0 nach γ_1, und setze

$$\omega(s,t) = \frac{h(s,t) - p}{|h(s,t) - p|} \quad \text{für } (s,t) \in [0,1] \times I.$$

Aus Stetigkeitsgründen gibt es ein $d > 0$ mit $|h(s,t) - p| \geq d$ für alle $(s,t) \in [0,1] \times I$. Also können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|\omega(s_1,t) - \omega(s_2,t)| &= \left| \frac{h(s_1,t) - p}{|h(s_1,t) - p|} - \frac{h(s_2,t) - p}{|h(s_2,t) - p|} \right| \\
&\leq \left| \frac{h(s_1,t) - p}{|h(s_1,t) - p|} - \frac{h(s_2,t) - p}{|h(s_1,t) - p|} \right| + \left| \frac{h(s_2,t) - p}{|h(s_1,t) - p|} - \frac{h(s_2,t) - p}{|h(s_2,t) - p|} \right| \\
&\leq \frac{|h(s_1,t) - h(s_2,t)|}{|h(s_1,t) - p|} + \frac{\big||h(s_2,t) - p| - |h(s_1,t) - p|\big|}{|h(s_1,t) - p|} \\
&\leq \frac{2}{d} |h(s_1,t) - h(s_2,t)|.
\end{aligned}$$

Wähle nun einen beliebigen Lift $\theta_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ von $\omega(\cdot, a)$. Definiere dann, abermals mit Satz 3.1, die Funktion $\theta : [0,1] \times I \to \mathbb{R}$, so dass für alle $s \in [0,1]$ gilt:

$$\theta(s, \cdot) \text{ ist Lift von } \omega(s, \cdot) \text{ mit } \theta(s,a) = \theta_a(s).$$

Da h auf $[0,1] \times I$ gleichmäßig stetig ist, folgt für $|s_1 - s_2| < \delta$

$$|e^{i\theta(s_1,t)} - e^{i\theta(s_2,t)}| = |\omega(s_1,t) - \omega(s_2,t)| \leq \frac{2}{d} |h(s_1,t) - h(s_2,t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I.$$

Da θ_a stetig, gilt o. B. d. A. zusätzlich $|\theta(s_1,a) - \theta(s_2,a)| \leq \pi$. Lemma 3.4 liefert nun die Abschätzung $|\theta(s_1,t) - \theta(s_2,t)| \leq \pi\varepsilon/2$ für alle $t \in I$, insbesondere

$$|n(h(s_1,\cdot),p) - n(h(s_2,\cdot),p)| \leq \frac{1}{2\pi}\big(|\theta(s_1,b) - \theta(s_2,b)| + |\theta(s_1,a) - \theta(s_2,a)|\big) \leq \varepsilon/2.$$

Aus der Ganzzahligkeit von $n(h(s,\cdot),p)$ ergibt sich die Behauptung. □

Folgerung 3.1 (Lokalkonstanz der Umlaufzahl) *Ist $\gamma \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$ geschlossen, so ist die Funktion $n(\gamma, \cdot) : \mathbb{R}^2 \backslash \gamma(I) \to \mathbb{Z}$ auf den Komponenten von $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma(I)$ konstant.*

BEWEIS: Wir zeigen, dass $n(\gamma, \cdot)$ lokal konstant ist. Aus Stetigkeitsgründen gibt es ein $d > 0$ mit $|\gamma(t) - p| \geq d$ für alle $t \in [0,1]$. Für $|q - p| < d$ betrachten wir

$$h : [0,1] \times I \to \mathbb{R}^2,\ h(s,t) = \gamma(t) + s(p - q).$$

Es gilt $|h(s,t) - p| \geq |\gamma(t) - p| - s|p - q| \geq d - |p - q| > 0$, das heißt h ist Homotopie in $\mathbb{R}^2 \backslash \{p\}$. Aus Definition 3.3 und Satz 3.3 folgt

$$n(\gamma, q) = n(\gamma + (p - q), p) = n(h(1,\cdot), p) = n(h(0,\cdot), p) = n(\gamma, p).$$

□

Beispiel 3.1 Für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{ikt}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$n(\gamma, p) = \begin{cases} k & \text{falls } |p| < 1 \\ 0 & \text{falls } |p| > 1. \end{cases}$$

Denn einerseits berechnen wir

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ike^{ikt}}{e^{ikt}}\, dt = k.$$

Andererseits gilt für $|p| \geq 1 + R$ die Abschätzung

$$|n(\gamma, p)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - p|}\, dt \leq \frac{|k|}{R} \to 0 \quad \text{mit } R \to \infty.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Folgerung 3.1.

Beispiel 3.2 Fundamentalsatz der Algebra

Definition 3.5 (Rotationsindex) *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine C^1-geschlossene, reguläre Kurve. Dann heißt die Zahl*

$$\operatorname{ind}(c) = n(c', 0) \in \mathbb{Z}$$

Rotationsindex (oder Tangentenumlaufzahl) von c.

Nach Lemma 3.3 gilt für eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve $c'' = \varkappa\nu = i\varkappa c'$. Also ergibt sich aus Satz 3.2 die nachstehende Formel.

Folgerung 3.2 (Formel für den Rotationsindex) *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ C^2-geschlossen und nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_I \varkappa(s)\, ds.$$

Lemma 3.8 (Invarianzen des Rotationsindex) *Der Rotationsindex ist invariant unter richtungstreuen Umparametrisierungen. Unter Euklidischen Bewegungen transformiert er sich mit ± 1, je nachdem ob F orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist.*

Beweis: Sei $\varphi \in C^1([\alpha, \beta], [a, b])$ bijektiv mit $\varphi' > 0$. Die Abbildung $(c \circ \varphi)' : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist homotop zu $c' \circ \varphi$ durch

$$h : [0, 1] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\},\ h(s, t) = \big(s + (1 - s)\varphi'(t)\big)\, c'(\varphi(t)).$$

Aus der Homotopieinvarianz und Lemma 3.6 folgt $n((c \circ \gamma)', 0) = n(c' \circ \gamma, 0) = n(c', 0)$. Für $\tilde{c} = F \circ c$ mit $F(z) = Sz + b$ gilt $\tilde{c}' = Sc'$, so dass sich die zweite Behauptung direkt aus Lemma 3.7 ergibt. $\square$

Definition 3.6 *Eine Kurve $c \in C^0([a, b], \mathbb{R}^2)$ heißt einfach geschlossen, wenn c geschlossen und $c|_{[a,b)}$ injektiv ist.*

Satz 3.4 (Umlaufsatz von H. Hopf) *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre, einfach C^1 geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$\mathrm{ind}\,(c) = \pm 1.$$

Beweis: Nach Lemma 3.8 können wir annehmen, dass $c : I = [0, L] \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert und wie folgt normiert ist:

$$\begin{array}{rl} |c(0)| = \max_{s \in I} |c(s)| & \text{(Wahl der Bogenlängenparametrisierung)}, \\ c(0) \in \mathbb{R}^+ \times \{0\} & \text{(Drehung)}, \\ c'(0) = e_2 & \text{(Spiegelung an der } x\text{-Achse)}. \end{array}$$

Die Idee des Beweises ist es, auf der Menge $D = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq L\}$ die folgende Abbildung zu definieren:

$$\omega : D \to \mathbb{S}^1,\, \omega(s_1, s_2) = \begin{cases} c'(s) & \text{für } s_1 = s_2, \\ \dfrac{c(s_2) - c(s_1)}{|c(s_2) - c(s_1)|} & \text{für } 0 < s_2 - s_1 < L, \\ -c'(L) & \text{für } (s_1, s_2) = (0, L). \end{cases}$$

****

Bild 3.4

****

Nach Definition ist $\omega(s, s) = c'(s)$. Andererseits erhalten wir durch Entlanglaufen an den beiden anderen Kanten des Dreiecks die Kurve

$$\gamma : [0, L] \to \mathbb{S}^1,\, \gamma(s) = \begin{cases} \omega(0, 2s) & \text{für } 0 \leq s \leq L/2, \\ \omega(2s - L, L) & \text{für } L/2 \leq s \leq L, \end{cases}$$

und wir haben

$$\gamma(s) = \begin{cases} c'(0) = e_2 & \text{für } s = 0, \\ \dfrac{c(2s) - c(0)}{|c(2s) - c(0)|} & \text{für } 0 < s < L/2, \\ -c'(0) & \text{für } s = L/2, \\ \dfrac{c(L) - c(2s - L)}{|c(L) - c(2s - L)|} & \text{für } L/2 < s < L, \\ c'(L) = e_2 & \text{für } s = L. \end{cases}$$

Zum Beweis des Satzes zeigen wir nun erstens, dass c' in $\mathbb{S}^1$ homotop zu γ ist, und berechnen zweitens $n(\gamma, 0) = 1$.

Zunächst ist ω wohldefiniert, da c einfach geschlossen ist. Längs der Diagonale $\{(s, s) : 0 \leq s \leq L\}$ ist ω stetig, denn für $s_1, s_2 \to s$ mit $s_1 < s_2$ gilt

$$\left| \frac{c(s_2) - c(s_1)}{s_2 - s_1} - c'(s) \right| = \frac{1}{s_2 - s_1} \left| \int_{s_1}^{s_2} (c'(t) - c'(s))\, dt \right| \to 0,$$

$$\left| \frac{|c(s_2) - c(s_1)|}{s_2 - s_1} - |c'(s)| \right| \leq \left| \frac{c(s_2) - c(s_1)}{s_2 - s_1} - c'(s) \right| \to 0,$$

und folglich

$$\frac{c(s_2) - c(s_1)}{|c(s_2) - c(s_1)|} \to \frac{c' s)}{|c'(s)|} = c'(s).$$

Im Punkt $(0, L)$ ist ω ebenfalls stetig, denn es gilt für $s_1 \searrow 0$, $s_2 \nearrow L$, wobei wir c periodisch fortsetzen,

$$\left| \frac{c(s_1) - c(s_2)}{s_1 + L - s_2} - c'(L) \right| = \frac{1}{s_1 + L - s_2} \left| \int_{s_2}^{s_1+L} (c'(t) - c'(L))\, dt \right| \to 0,$$

also können wir analog argumentieren. Wir erhalten nun eine Homotopie in $\mathbb{S}^1$ von c' nach γ durch $h(\lambda, s) = \omega(F(\lambda, s))$, indem wir erst $f : [0, 1] \to D$, $f(\lambda) = (1 - \lambda)(L/2, L/2) + \lambda(0, L)$ setzen und dann $F : [0, 1] \times [0, L] \to D$ wie folgt definieren (vgl. Bild):

$$F(\lambda, s) = \begin{cases} \frac{2s}{L} f(\lambda) & \text{für } 0 \leq s \leq L/2, \\ (\frac{2s}{L} - 1)(L, L) + 2(1 - \frac{s}{L}) f(\lambda) & \text{für } L/2 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Es bleibt, die Umlaufzahl $n(\gamma, 0)$ zu berechnen. Aus unseren Normierungen folgt

$$\langle \gamma(s), e_1 \rangle \begin{cases} \leq 0 & \text{für } 0 \leq s \leq L/2, \\ \geq 0 & \text{für } L/2 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Unter Verwendung des Hauptzweigs $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ lautet nun ein stetiger Lift

$$\theta(s) = \begin{cases} \pi - \arcsin\langle \gamma, e_2 \rangle & \text{für } 0 \leq s \leq L/2, \\ 2\pi + \arcsin\langle \gamma, e_2 \rangle & \text{für } L/2 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Es folgt

$$2\pi n(\gamma, 0) = \theta(L) - \theta(0) = (2\pi + \arcsin 1) - (\pi - \arcsin 1) = 2\pi,$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Als weitere Anwendung der Umlaufzahl wollen wir den Jordanschen Kurvensatz für C^1-geschlossene, reguläre Kurven $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ beweisen. Als erstes untersuchen wir die lokale Situation und zeigen, dass $\gamma(I)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Dies ist eine Standardanwendung des Umkehrsatzes; der Beweis könnte zurückgestellt werden. Da wir die Endpunkte von γ nicht gesondert behandeln wollen, setzen wir γ stets periodisch auf $\mathbb{R}$ fort.

Lemma 3.9 *Sei $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ eine L-periodische, auf $I = [-L/2, L/2]$ einfach geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Normale ν. Dann gibt es zu $s_0 \in \mathbb{R}$ eine offene Umgebung W_{s_0} von $\gamma(s_0)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$W_{s_0} \backslash \gamma(I)$ ist disjunkte Vereinigung von zwei Gebieten $W_{s_0}^{\pm}$,*

(2) *$(\partial W_{s_0}^{\pm}) \cap W_{s_0} = \gamma(I) \cap W_{s_0}$,*

(3) *$\gamma(s_0) + t\nu(s_0) \in W_{s_0}^+$ für hinreichend kleine $t > 0$.*

Beweis: Wir können $s_0 = 0$ annehmen, und betrachten für $\delta > 0$ die Abbildung

$$f : (-2\delta, 2\delta) \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^2,\ f(s, t) = \gamma(s) + t\nu(0).$$

Es gilt $Df(0,0) \in \mathbb{SO}(2)$. Wähle $\delta \in (0, L/2)$ so klein, dass f Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Mit $W_0 = f((-\delta,\delta) \times (-\varepsilon,\varepsilon))$ behaupten wir für $\varepsilon \in (0,\delta)$ hinreichend klein

$$\gamma(s) \in W_0,\ s \in [-L/2, L/2] \quad \Leftrightarrow \quad s \in (-\delta,\delta). \tag{3.4}$$

****

Bild 3.5

****

Für $s \in (-\delta,\delta) \subset (-L/2, L/2)$ gilt $\gamma(s) = f(s,0) \in W_0$. Wäre (3.4) für jedes $\varepsilon > 0$ falsch, so gibt es $\sigma_i \in [-L/2, L/2] \backslash (-\delta,\delta)$ und $s_i \in (-\delta,\delta)$, $t_i \to 0$ mit

$$\gamma(\sigma_i) = f(s_i, t_i).$$

Da f injektiv ist, gilt $\gamma(s) = f(s,0) \notin W_0$ für $\delta \leq |s| < 2\delta$, also folgt $|\sigma_i| \geq 2\delta$. Durch Übergang zu Teilfolgen erhalten wir $\sigma_i \to \sigma \in [-L/2, L/2] \backslash (-2\delta, 2\delta)$, $s_i \to s \in [-\delta,\delta]$ und durch Grenzübergang

$$\gamma(\sigma) = f(s,0) = \gamma(s),$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass γ einfach ist. Damit ist (3.4) gezeigt, und insbesondere gilt $\gamma(I) \cap W_0 = f((-\delta,\delta) \times \{0\})$. Es folgt $W_0 \backslash \gamma(I) = W_0^+ \cup W_0^-$ für

$$W_0^+ = f\big((-\delta,\delta) \times (0,\varepsilon)\big) \quad \text{und} \quad W_0^- = f\big((-\delta,\delta) \times (-\varepsilon,0)\big).$$

Da f diffeomorph ist, ist $\partial W_0^\pm$ das Bild unter f von $\partial[(-\delta,\delta) \times (0, \pm\varepsilon)]$ bzw.

$$(\partial W_{s_0}^\pm) \cap W_{s_0} = f((-\delta,\delta) \times \{0\}) = \gamma(I) \cap W_0.$$

Schließlich ergibt sich Behauptung (3) aus

$$\gamma(0) + t\nu(0) = f(0,t) \in W_0^+ \quad \text{für } t \in (0,\varepsilon).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Satz 3.5 (Jordanscher Kurvensatz) *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ stetig und einfach geschlossen. Dann ist $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma(I)$ disjunkte Vereinigung eines beschränkten Gebiets U und eines unbeschränkten Gebiets V mit $\partial U = \partial V = \gamma(I)$.*

Beweis: Wir zeigen den Satz für C^1-geschlossene reguläre Kurven. Wir können dann annehmen, dass $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ auf $I = [-L/2, L/2]$ einfach geschlossen und L-periodisch ist. Sei U eine Komponente von $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma(I)$. Dann ist ∂U eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von $\gamma(I)$. Für $\gamma(s_0) \in \partial U$ gilt nach Lemma 3.9(1) eine der Alternativen

$$U \cap W_{s_0} = W_{s_0}^+ \quad \text{oder} \quad U \cap W_{s_0} = W_{s_0}^- \quad \text{oder} \quad U \cap W_{s_0} = W_{s_0}^+ \cup W_{s_0}^-. \tag{3.5}$$

Mit Lemma 3.9(2) folgt $\partial U \cap W_{s_0} = \gamma(I) \cap W_{s_0}$, das heißt ∂U ist offen in $\gamma(I)$ und somit $\partial U = \gamma(I)$, da $\gamma(I)$ zusammenhängend ist. Insbesondere zeigt (3.5), dass $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma(I)$ höchstens zwei Komponenten besitzt. Für $R > 0$ hinreichend groß ist $\gamma(I) \subset \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq R\}$, und dort homotop zu einer konstanten Kurve. Da $\{p \in \mathbb{R}^2 : |p| > R\}$ zusammenhängend ist, hat $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma(I)$ genau eine unbeschränkte Komponente V, und es gilt $n(\gamma, p) = 0$ für $p \in V$ nach Folgerung 3.1. Der Satz ist also bewiesen, wenn wir zeigen:

Es gibt ein $q \in \mathbb{R}^2 \backslash \gamma(I)$ *mit* $n(\gamma, q) = \pm 1$.

Für $s_0 = 0$ sei $f|(-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to W_0$ die in Lemma 3.9 definierte Abbildung. Betrachte für $0 < \varrho < \varepsilon$ die Punkte $p = \gamma(0) = f(0,0)$, $p^\pm = f(0, \pm\varrho/2)$ sowie die Kurven

$$\gamma^\pm(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{für } s \in [-L/2, L/2] \backslash [-\varrho, \varrho] \\ f\Big(\varrho \exp\big(\pm \frac{i\pi}{2}(1 - \frac{s}{\varrho})\big)\Big) & \text{für } s \in [-\varrho, \varrho]. \end{cases}$$

****

Bild 3.6

****

Es gilt dann $n(\gamma, p^\pm) = n(\gamma^\mp, p^\pm)$, denn man hat die affine Homotopie, für $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$h^\mp(\lambda, s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{für } s \in [-L/2, L/2] \backslash [-\varrho, \varrho] \\ f\Big((1-\lambda)\,(s,0) + \lambda\,\varrho \exp\big(\mp\frac{i\pi}{2}(1 - \frac{s}{\varrho})\big)\Big) & \text{für } s \in [-\varrho, \varrho]. \end{cases}$$

Da p und $p^\pm$ in $f(B_\varrho(0))$ liegen und damit in derselben Komponente von $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma^\pm(I)$, gilt weiter $n(\gamma^\mp, p^\pm) = n(\gamma^\mp, p)$ nach Folgerung 3.1. Also erhalten wir

$$n(\gamma, p^+) - n(\gamma, p^-) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_I \frac{(\gamma^-)'}{\gamma^- - p}\,ds - \int_I \frac{(\gamma^+)'}{\gamma^+ - p}\,ds\Big) = n(f \circ c, p),$$

wobei $c(t) = \varrho e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$. Aber man sieht leicht

$$n(f \circ c, p) = n(F \circ c, p) \quad \text{für } F(z) = p + Df(0,0)z,$$

und zwar mit der affinen Homotopie $h(\lambda, t) = (1-\lambda)f(c(t)) + \lambda F(c(t))$, für $0 \leq \lambda \leq 1$. Nach Konstruktion in Lemma 3.9 ist $Df(0,0) \in \mathbb{SO}(2)$, also folgt aus $f(z) = F(z) + o(|z|)$

$$|h(\lambda, t) - p| \geq |Df(0,0)c(t)| - (1-\lambda)o(|c(t)|) \geq \varrho - o(\varrho) > 0$$

für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Schließlich ist $F \circ c$ ein Kreis um p, der in positivem Sinn durchlaufen wird. Also folgt

$$n(\gamma, p^+) - n(\gamma, p^-) = n(f \circ c, p) = n(F \circ c, p) = 1. \tag{3.6}$$

Da einer der Punkte $p^\pm$ in V liegt, folgt $n(\gamma, p^+) = 1$ oder $n(\gamma, p^-) = -1$. $\square$

Definition 3.7 *Eine einfach* C^1*-geschlossene, reguläre Kurve* $c : I \to \mathbb{R}^2$ *heißt konvex, wenn*

$$\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0)\rangle \geq 0 \quad \textit{für alle } t_0, t \in I,$$

oder

$$\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0)\rangle \leq 0 \quad \textit{für alle } t_0, t \in I.$$

Anschaulich liegt die Kurve dann entweder immer auf der linken Seite der Tangente, oder immer auf der rechten Seite. Man kann sich überlegen, dass die Seite nicht festgelegt werden muss, das heißt folgende Bedingung ist ausreichend (Übungsaufgabe): *für alle* $t_0 \in I$ *gilt*

$$\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0)\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } t \in I,$$

oder

$$\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0)\rangle \leq 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Bekanntlich heißt eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ konvex, wenn sie mit $p, q \in A$ auch die Strecke $\overline{pq}$ enthält. Natürlich sind die Begriffe eng verwandt, und das soll kurz abgeklärt werden.

Lemma 3.10 *Für eine einfach C^1-geschlossene, reguläre Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Das Innengebiet U von c ist konvex.*

(2) *c ist konvex.*

Beweis: Sei U das Innengebiet von c, und c sei so nach der Bogenlänge parametrisiert, dass $n(c,p) = 1$ für $p \in U$. In (3.6) gilt dann $n(c,p^+) = 1$, also $W_{s_0}^+ \subset U$ und nach Lemma 3.9(3) gilt $c(s) + \lambda\nu(s) \in U$ für $\lambda > 0$ hinreichend klein, das heißt ν ist innere Normale von U.

Ist U konvex, so gibt es zu jedem $p \in \partial U$ eine affine Halbebene $H_p = \{q \in \mathbb{R}^2 : \langle q-p, v\rangle > 0\}$, so dass $U \subset H_p$ und $p \in \partial H_p$. Für $p = c(s_0)$ hat die Funktion $s \mapsto \langle c(s) - p, v\rangle$ in $s = s_0$ ein Minimum, folglich ist $\langle c'(s_0), v\rangle = 0$ und damit $v = \nu(s_0)$. Also gilt $\langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle \geq 0$ für alle $s \in I$.

Ist umgekehrt c konvex, so sei $H_s = \{q \in \mathbb{R}^2 : \langle q - c(s), \nu(s)\rangle > 0\}$ für $s \in [0,L]$. Es gilt dann $U \subset \bigcap_{s\in I} H_s$. Für die umgekehrte Inklusion bestimmen wir zu beliebigem $p \in \mathbb{R}^2\backslash U$ ein $s_0 \in [0,L]$ mit $p \notin H_{s_0}$, und zwar wählen wir $s_0 \in I$ mit

$$|c(s_0) - p| = \min_{s\in I} |c(s) - p| =: d \geq 0.$$

Es folgt $0 = \frac{d}{ds}|c(s) - p|^2|_{s=s_0} = 2\langle c(s_0) - p, c'(s_0)\rangle$, also $p = c(s_0) \pm d\,\nu(s_0)$. Wäre nun $p \in H_{s_0}$, das heißt $\langle p - c(s_0), \nu(s_0)\rangle > 0$, so folgt $p \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{U}$ und weiter $c(s_0) + \lambda\nu(s_0) \in \mathbb{R}^2\backslash\overline{U}$ für alle $\lambda \in (0,d]$, ein Widerspruch. Damit ist (1) gezeigt. $\square$

Satz 3.6 (Charakterisierung konvexer Kurven) *Für eine einfach C^2-geschlossene, reguläre Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *c ist konvex.*

(2) *c hat Krümmung $\varkappa \geq 0$ (oder $\varkappa \leq 0$).*

Beweis: Wir parametrisieren c wieder nach der Bogenlänge, so dass ν die innere Normale des Innengebiets U ist. Ist c konvex, so hat die Funktion $s \mapsto \langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle$ in $s = s_0$ ein Extremum und es folgt sofort

$$\langle c''(s_0), \nu(s_0)\rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \varkappa(s_0) \geq 0.$$

Angenommen, es ist $\varkappa \geq 0$ jedoch c ist nicht konvex. Dann gibt es ein $s_0 \in I$, so dass die Funktion $\varphi(s) = \langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle$ das Vorzeichen wechselt, das heißt wir haben

$$\varphi(s_1) = \min_{s\in I} \varphi(s) < 0 = \varphi(s_0) < \max_{s\in I} \varphi(s) = \varphi(s_2).$$

Es folgt $\langle c'(s_1), \nu(s_0)\rangle = \langle c'(s_2), \nu(s_0)\rangle = 0$, das heißt mindestens zwei der drei Vektoren $c'(s_0), c'(s_1), c'(s_2)$ sind gleich. Nach evtl. Umnummerierung gelte $c'(s_1) = c'(s_2)$ mit $s_1 < s_2$. Setze c periodisch fort und wähle einen Lift $\theta \in C^0(\mathbb{R})$ von c'. Es gilt dann $\theta' = \varkappa$ und folglich

$$\int_{s_1}^{s_2} \varkappa\,ds = 2\pi n(c'|_{[s_1,s_2]}, 0) \quad \text{und} \quad \int_{s_2}^{s_1+L} \varkappa\,ds = 2\pi n(c'|_{[s_2,s_1+L]}, 0).$$

Andererseits liefert der Umlaufsatz von Hopf

$$n(c'|_{[s_1,s_2]},0) + n(c'|_{[s_2,s_1+L]},0) = \operatorname{ind}(c) = 1.$$

Eines der beiden Integrale muss verschwinden, also parametrisiert c zum Beispiel auf $[s_1, s_2]$ eine Gerade. Es folgt $c'(s) = \pm c'(s_0)$ für $s \in [s_1, s_2]$, also ist φ auf $[s_1, s_2]$ konstant, ein Widerspruch. □

Im letzten Abschnitt hatten wir gezeigt, dass in der Ungleichung von Fenchel (Satz 2.4) höchstens für einfach geschlossene, ebene Kurven Gleichheit eintritt. In diesem Fall gilt mit dem Umlaufsatz von Hopf

$$0 = \int_0^L |\varkappa|\, ds - \int_0^L \varkappa\, ds = 2\int_{\{\varkappa<0\}} |\varkappa|\, ds,$$

also folgt $\varkappa \geq 0$. Nach Satz 3.6 und Lemma 3.10 ist die Kurve konvex, und berandet ein konvexes Gebiet. Umgekehrt tritt für jede ebene, konvexe Kurve in der Fenchel-Ungleichung der Gleichheitsfall ein.

4 Weitere Resultate für ebene Kurven

In diesem Abschnitt diskutieren wir zwei weitere Sätze für ebene Kurven, den Vierscheitel-Satz und die isoperimetrische Ungleichung. Diese Resultate konnten in der Vorlesung aus Zeitmangel nicht besprochen werden, obwohl sie zu den Klassikern der elementaren Differentialgeometrie gehören. Vor allem die isoperimetrische Ungleichung hat auch mannigfache Anwendungen.

Satz 4.1 (Vierscheitel-Satz für konvexe Kurven) *Sei $\gamma : I = [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^3-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte, konvexe Kurve. Dann hat die Funktion $\varkappa'$ mindestens vier verschiedene Nullstellen.*

Beweis: Die Nullstellen von $\varkappa'$ werden auch als Scheitel bezeichnet. Wir können annehmen, dass $\varkappa$ in $s_0 = 0$ sein Minimum annimmt und in $s_1 \in (0, L)$ sein Maximum, dies sind also mal zwei Scheitel. Nach Translation und Drehung liegen $\gamma(0)$ und $\gamma(s_1)$ auf der x-Achse.

Angenommen für ein $s \in [0, L]$ ist $\gamma(s)$ auf der x-Achse und $\gamma'(s) = \pm e_1$, das heißt die x-Achse ist Tangente der Kurve. Nach Definition der Konvexität folgt $\gamma(I) \subset H$, wobei H die abgeschlossene obere oder untere Halbebene ist. Ist U das Innengebiet von γ, so folgt weiter

$$\gamma(I) \cap \partial H = \partial U \cap \partial H = \overline{U} \cap \partial H,$$

das heißt $\gamma(I) \cap \partial H$ ist eine Strecke. Damit ist $\gamma([0, s_1]) \subset \partial H$ oder $\gamma([s_1, L]) \subset \partial H$, insbesondere $\varkappa(0) = \varkappa(s_1) = 0$. Aber das heißt $\varkappa \equiv 0$ und γ ist eine Gerade, Widerspruch.

Sei jetzt nach evtl. Spiegelung $\langle \gamma'(0), e_2\rangle < 0$. Angenommen, $\gamma(s_2)$ liegt auf der x-Achse für ein $s_2 \in (0, s_1)$, Dann haben wir drei Punkte $\gamma(\sigma_\nu)$ auf der x-Achse, nämlich $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \{0, s_1, s_2\}$, mit $\langle\gamma(\sigma_1), e_1\rangle < \langle\gamma(\sigma_2), e_1\rangle < \langle\gamma(\sigma_3), e_1\rangle$; hier verwenden wir, dass

γ einfach ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle \nu(\gamma'(\sigma_2)), \gamma(\sigma_3) - \gamma(\sigma_2)\rangle &= -\underbrace{\langle \gamma'(\sigma_2), e_2\rangle}_{\neq 0} \underbrace{\langle \gamma(\sigma_3) - \gamma(\sigma_2), e_1\rangle}_{>0}, \\
\langle \nu(\gamma'(\sigma_2)), \gamma(\sigma_1) - \gamma(\sigma_2)\rangle &= -\underbrace{\langle \gamma'(\sigma_2), e_2\rangle}_{\neq 0} \underbrace{\langle \gamma(\sigma_1) - \gamma(\sigma_2), e_1\rangle}_{<0},
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Konvexität. Wir können also annehmen, dass $\langle \gamma, e_2\rangle < 0$ ist auf $(0, s_1)$, und analog $\langle \gamma, e_2\rangle > 0$ auf (s_1, L).

Ist $\varkappa$ monoton nichtfallend auf $[0, s_1]$ und monoton nichtwachsend auf $[s_1, L]$, so folgt

$$0 \geq \int_0^L \varkappa' \langle \gamma(s), e_2\rangle\, ds = \Big[\varkappa(s)\langle \gamma(s), e_2\rangle\Big]_{s=0}^{s=L} - \int_0^L \varkappa \langle \gamma'(s), e_2\rangle\, ds = \int_0^L \langle \nu'(s), e_2\rangle\, ds = 0.$$

Aus der Diskussion des Vorzeichens von $\langle \gamma, e_2\rangle$ ergibt sich $\varkappa' \equiv 0$, das heißt γ ist ein Kreis.

Ist aber zum Beispiel $\varkappa$ *nicht* monoton nichtfallend auf $[0, s_1]$, so gibt es $0 \leq s_2 < s_3 \leq s_1$ mit $\varkappa(s_2) > \varkappa(s_3)$, also insbesondere $s_2 > 0$ und $s_3 < s_1$. Aber dann nimmt $\varkappa$ in $[0, s_3]$ ein (lokales) Maximum und in $[s_2, s_1]$ ein (lokales) Minimum an. Wir haben also sogar bewiesen, dass $\varkappa$ mindestens zwei lokale Maxima und zwei lokale Minima hat. $\square$

Der Vierscheitel-Satz gilt auch für nichtkonvexe Kurven. Eine Standardreferenz ist R. Osserman, The four-or-more vertex theorem, *American Mathematical Monthly* **92** (1985), 332–337.

5 Die erste Fundamentalform einer Fläche

Unsere Darstellung der Flächentheorie geht von Flächen aus, die durch eine Parameterdarstellung auf einem zweidimensionalen Gebiet gegeben sind. Lokal ist das natürlich für jede Fläche der Fall. Gegenüber der Auffassung von Flächen als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ hat der parametrische Zugang den Vorteil, dass die zentralen Größen wie die erste und zweite Fundamentalform auf dem Parametergebiet definiert sind; dies bereitet den Umgang mit Riemannschen Metriken und allgemeiner Tensoren bei abstrakten Mannigfaltigkeiten vor. Auf der anderen Seite knüpft die Sichtweise direkt an die Kurventheorie an.

Definition 5.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $k \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}$. Eine Abbildung $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$ heißt (regulär parametrisierte) Fläche oder zweidimensionale Immersion der Klasse C^k, falls gilt:*

$$\operatorname{rang} DF(x) = 2 \quad \text{für alle } x = (x^1, x^2) \in U.$$

Mit anderen Worten, die Vektoren $\partial_1 F(x)$ und $\partial_2 F(x)$ sind linear unabhängig für alle $x \in U$.
****

Bild 5.1
****
Der zweidimensionale Unterraum

$$\operatorname{Bild} DF(x) = \operatorname{Span}\{\partial_1 F(x), \partial_2 F(x)\} \tag{5.1}$$

heißt Tangentialraum von F im Punkt x. Der *affine* Tangentialraum ist $F(x) + \operatorname{Bild} DF(x)$. Die Abbildung F wird nicht als injektiv vorausgesetzt, das heißt die Fläche darf sich selbst durchdringen. Es macht dann keinen Sinn, vom Tangentialraum im Punkt $p \in \operatorname{Bild} F$ zu reden. Eine stetige Abbildung $N : U \to \mathbb{R}^3$ heißt Einheitsnormale längs F, falls

$$|N(x)| = 1 \quad \text{und} \quad N(x) \perp \operatorname{Bild} DF(x) \quad \text{für alle } x \in U. \tag{5.2}$$

Für Einheitsnormalen $N_{1,2}$ längs F ist $\langle N_1, N_2 \rangle \in \{\pm 1\}$. Ist U zusammenhängend, so gibt daher genau zwei Einheitsnormalen längs F, nämlich

$$N^\pm : U \to \mathbb{S}^2,\ N^\pm(x) = \pm \frac{\partial_1 F(x) \times \partial_2 F(x)}{|\partial_1 F(x) \times \partial_2 F(x)|}.$$

Insbesondere ist für $F \in C^k$ jede Einheitsnormale von der Klasse C^{k-1}.

Beispiel 5.1 (Graphen) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Der Graph einer reellwertigen Funktion $f \in C^k(U)$, $f = f(x, y)$, ist die parametrisierte Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Es folgt, wenn wir die partiellen Anleitungen mit f_x und f_y bezeichnen,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\operatorname{rang} DF(x, y) = 2$. Wir berechnen

$$F_x \times F_y = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1) = (-Df, 1),$$

also erhalten wir die Einheistnormale

$$N = \frac{(-Df, 1)}{\sqrt{1 + |Df|^2}} : U \to \mathbb{S}^2. \tag{5.3}$$

Beispiel 5.2 (Rotationsflächen) Sei $c:(a,b)\to\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$, $c(t)=(r(t),h(t))$ eine reguläre Kurve. Durch Rotation um die z-Achse erhalten wir die Fläche

$$F:(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\; F(t,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r(t)\\ 0\\ h(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(t)\cos\varphi\\ r(t)\sin\varphi\\ h(t)\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$DF(t,\varphi)=\begin{pmatrix}r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi\\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi\\ h'(t) & 0\end{pmatrix}.$$

Um zu sehen, ob F eine Immersion ist, rechnen wir weiter

$$\partial_1 F\times\partial_2 F=\begin{pmatrix}-rh'\cos\varphi\\ -rh'\sin\varphi\\ rr'\end{pmatrix}.$$

Es folgt $|\partial_1 F\times\partial_2 F|=r|c'|>0$, also ist $\operatorname{rang} DF(t,\varphi)=2$ und wir erhalten

$$N=\frac{1}{|c'|}\begin{pmatrix}-h'\cos\varphi\\ -h'\sin\varphi\\ r'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{|c'|}\begin{pmatrix}-h'\\ 0\\ r'\end{pmatrix}.$$

In Punkten mit $r=0$ hätte die Fläche nur Rang Eins, und wäre in der Regel dort nicht glatt.

Definition 5.2 (erste Fundamentalform) *Sei $F\in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann heißt die von $x\in U$ abhängige Bilinearform*

$$g(x)(v,w)=\langle DF(x)v,DF(x)w\rangle\quad(v,w\in\mathbb{R}^2)$$

erste Fundamentalform von F. Bezüglich der Standardbasis $\{e_1,e_2\}$ hat g die Koeffizienten

$$g_{ij}:U\to\mathbb{R},\; g_{ij}(x)=\langle\partial_i F(x),\partial_j F(x)\rangle\quad(1\le i,j\le 2).$$

Die zugehörige Matrix bezeichnen wir mit

$$G:U\to\mathbb{R}^{2\times 2},\; G(x)=DF(x)^{\mathrm{T}}DF(x)=\big(g_{ij}(x)\big)_{1\le i,j\le 2}.$$

Für jedes $x\in U$ ist $g(x)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, denn es gilt:

- $g(x)$ ist symmetrisch:

$$g(x)(v,w)=\langle DF(x)v,DF(x)w\rangle=\langle DF(x)w,DF(x)v\rangle=g(x)(w,v).$$

  Äquivalent dazu ist die Symmetrie der Matrix G, also $g_{ij}=g_{ji}$.

- $g(x)$ ist bilinear:

$$\begin{aligned}g(x)(\alpha v_1+\beta v_2,w) &= \langle DF(x)(\alpha v_1+\beta v_2),DF(x)w\rangle\\ &= \alpha\,\langle DF(x)v_1,DF(x)w\rangle+\beta\,\langle DF(x)v_2,DF(x)w\rangle\\ &= \alpha\, g(x)(v_1,w)+\beta\, g(x)(v_2,w).\end{aligned}$$

  Die Linearität in der zweiten Komponente folgt wegen der Symmetrie.

- $g(x)$ ist positiv definit:

$$g(x)(v,v) = \langle DF(x)v, DF(x)v\rangle = |Df(x)v|^2 \geq 0.$$

Bei Gleichheit folgt $DF(x)v = 0$ und hieraus $v = 0$, denn die Dimensionsformel liefert $\dim\ker DF(x) = \dim\mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Bild} DF(x) = 0$.

Die Abbildung $DF(x) : \big(\mathbb{R}^2, g(x)\big) \to (\operatorname{Bild} DF(x), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ ist eine Isometrie zwischen (zweidimensionalen) Euklidischen Vektorräumen, denn es gilt nach Definition

$$|DF(x)v| = \sqrt{g(x)(v,v)} = \|v\|_{g(x)}. \tag{5.4}$$

Ein Skalarprodukt, das von $x \in U$ abhängt, nennt man Riemannsche Metrik auf U; dabei wird die Abhängigkeit von $x \in U$ in der Notation oft ignoriert, das heißt man schreibt oft $g(v,v)$ für die Funktion $x \mapsto g(x)(v,v)$.

Lemma 5.1 (Bogenlänge auf Flächen) *Sei $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann gilt für jede Kurve $\gamma \in C^1(I,U)$*

$$L(F\circ\gamma) = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))}\,dt.$$

Beweis: Aus (5.4) folgt

$$L(F\circ\gamma) = \int_I |(F\circ\gamma)'(t)|\,dt = \int_I |DF(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt.$$

□

Beispiel 5.3 (Erste Fundamentalform von Graphen) Für eine als Graph gegebene Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ folgt für die erste Fundamentalform

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_xf_y \\ f_xf_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Ist $\gamma : I \to U$, $\gamma(s) = (\xi(s),\eta(s))$ eine Kurve, so folgt

$$L(F\circ\gamma) = \int_I \Big((1+f_x(\xi,\eta)^2)\,(\xi')^2 + 2f_x(\xi,\eta)f_y(\xi,\eta)\,\xi'\eta' + (1+f_y(\xi,\eta)^2)\,(\eta')^2\Big)^{1/2} ds.$$

Beispiel 5.4 (Erste Fundamentalform von Rotationsflächen) Wir berechnen

$$G(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)^2 + h'(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Für $\gamma : I \to (a,b)\times\mathbb{R}$, $\gamma(s) = (\tau(s),\phi(s))$, folgt

$$L(F\circ\gamma) = \int_I \Big(\big(r'(\tau)^2 + h'(\tau)^2\big)\,(\tau')^2 + r(\tau)^2\,(\phi')^2\Big)^{1/2} ds.$$

Lemma 5.2 (Winkel zwischen Tangentialvektoren) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Der Winkel zwischen den Vektoren $DF(x)v_1$ und $DF(x)v_2$ ist*

$$\angle(DF(x)v_1, DF(x)v_2) = \arccos \frac{g(x)(v_1, v_2)}{\|v_1\|_{g(x)} \|v_2\|_{g(x)}} =: \angle_{g(x)}(v_1, v_2).$$

Beweis: Wir berechnen mit (5.4)

$$\angle\big(DF(x)v_1, DF(x)v_2\big) = \arccos \frac{\langle DF(x)v_1, DF(x)v_2 \rangle}{|DF(x)v_1|\,|DF(x)v_2|} = \arccos \frac{g(x)(v_1, v_2)}{\|v_1\|_{g(x)} \|v_2\|_{g(x)}}.$$

□

Beispiel 5.5 Im Fall der Rotationsflächen ergibt sich für die Vektoren $v_1 = (t_1, \varphi_1)$ und $v_2 = (t_2, \varphi_2)$ der Winkel

$$\angle(DF(t,\varphi)v_1, DF(t,\varphi)v_2) = \arccos \frac{|c'(t)|^2\, t_1 t_2 + r(t)^2\, \varphi_1 \varphi_2}{\sqrt{|c'(t)|^2\, t_1^2 + r(t)^2\, \varphi_1^2}\sqrt{|c'(t)|^2\, t_2^2 + r(t)^2\, \varphi_2^2}}.$$

Der Winkel hängt also im allgemeinen von $t \in (a, b)$ ab.

Als nächstes wollen wir den Flächeninhalt einer Immersion definieren. Zur Motivation betrachten wir für Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ den Flächeninhalt $A(v_1, v_2)$ des von ihnen aufgespannten Parallelogramms. Wir behaupten

$$A(v_1, v_2) = \sqrt{|v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}.$$

Wähle dazu $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ orthonormal mit $v_1 = \alpha e_1$ und $v_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$, und berechne

$$A(v_1, v_2) = A(\alpha e_1, \beta e_1 + \gamma e_2) = A(\alpha e_1, \gamma e_2) = |\alpha\gamma| = \sqrt{|v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}.$$

Ist nun $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, so sollte lokal gelten

$$dA = A(F_x, F_y)\, dxdy = \sqrt{\det G}\, dxdy.$$

Definition 5.3 *Der Flächeninhalt einer Immersion $F : U \to \mathbb{R}^3$ ist*

$$A(F) = \int_U \sqrt{\det G} =: A_g(U),$$

wobei $G : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix der ersten Fundamentalform von F ist.

Beispiel 5.6 Für einen Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ erhalten wir

$$A(F) = \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \int_U \sqrt{1 + |Df|^2}.$$

Beispiel 5.7 Für den Flächeninhalt einer Rotationsfläche

$$F : (a, b) \times (\varphi_1, \varphi_2) \to \mathbb{R}^3,\ F(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$$

ergibt sich die Formel

$$A(F) = (\varphi_2 - \varphi_1) \int_a^b r\sqrt{(r')^2 + (h')^2}.$$

Definition 5.4 *Seien $F : U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{F} : V \to \mathbb{R}^3$ Flächen der Klasse C^1. Dann heißt $\tilde{F}$ Umparametrisierung von F, falls es einen C^1-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$ gibt mit*

$$\tilde{F} = F \circ \phi.$$

Auf der Menge aller parametrisierten C^1-Flächen ist die Relation

$$F \sim \tilde{F} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{F} \text{ ist Umparametrisierung von } F$$

eine Äquivalenzrelation. Der Diffeomorphismus ϕ ist nicht eindeutig bestimmt, zum Beispiel gilt für eine Rotationsfläche trivialerweise $F = F \circ \mathrm{id}$, aber natürlich auch $F = F \circ \tau_k$ für $\tau_k(t, \varphi) = (t, \varphi + 2k\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 5.1 (Transformationsverhalten von g) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche.*

(1) *Ist $\tilde{F} \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ eine Umparametrisierung von F, also $\tilde{F} = F \circ \phi$ mit einem C^1-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$, so gilt für die zugehörigen ersten Fundamentalformen $\tilde{g}(v, w) = g \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w)$ bzw. äquivalent*

$$\tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\,D\phi \qquad \text{oder} \qquad \tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl} \circ \phi\, \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l.$$

(2) *Ist $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Euklidische Bewegung und $\tilde{F} = B \circ F$, so folgt $\tilde{g} = g$.*

Beweis: In der Situation von (1) berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{g}(v, w) &= \langle D(F \circ \phi) \cdot v, D(F \circ \phi) \cdot w \rangle \\ &= \langle (DF) \circ \phi\, D\phi \cdot v, (DF) \circ \phi\, D\phi \cdot w \rangle \\ &= g \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w). \end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}(e_i, e_j) = (g \circ \phi)(\partial_i \phi, \partial_j \phi) = \sum_{k,l=1}^{2} (g_{kl} \circ \phi) \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l.$$

Die Formel für die Matrix ergibt sich alternativ wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= D(F \circ \phi)^{\mathrm{T}} D(F \circ \phi) \\ &= \big((DF) \circ \phi\, D\phi\big)^{\mathrm{T}} (DF) \circ \phi\, D\phi \\ &= D\phi^{\mathrm{T}} \big(DF^{\mathrm{T}} DF\big) \circ \phi\, D\phi \\ &= D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\,D\phi. \end{aligned}$$

Für Behauptung (2) beachten wir $B(y) = Sy + a$ mit $S \in \mathbb{O}(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$, siehe Satz 0.1, also $DB(y) = S$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ und

$$\tilde{g}(x)(v, w) = \langle D(B \circ F)(x)v, D(B \circ F)(x)w \rangle = \langle S\,DF(x)v, S\,DF(x)w \rangle = g(x)(v, w).$$

□

Wir wollen überprüfen, ob die definierten Begriffe Bogenlänge, Winkel und Flächeninhalt unabhängig von der Wahl der Parametrisierung sind, und zwar wollen wir diese Invarianz allein aus der Transformationsformel für die erste Fundamentalform herleiten, ohne auf die Fläche F direkt Bezug zu nehmen.

Folgerung 5.1 *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $\tilde{F} = F \circ \phi$ eine Umparametrisierung mit einem Diffeomorphismus $\phi \in C^1(V, U)$. Sind g bzw. $\tilde{g}$ die zugehörigen ersten Fundamentalformen, so gelten folgende Aussagen:*

(1) $L_g(\phi \circ \gamma) = L_{\tilde{g}}(\gamma) \quad$ *für* $\gamma : I \to V$,

(2) $\angle_{g(\phi(x))}(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \angle_{\tilde{g}(x)}(v, w) \quad$ *für* $x \in V$ *und* $v, w \in \mathbb{R}^2$,

(3) $A_g(\phi(E)) = A_{\tilde{g}}(E) \quad$ *für* $E \subset V$.

Beweis: Nach Satz 5.1 gilt $g(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \tilde{g}(v, w)$, insbesondere

$$\|D\phi(x)v\|_{g(\phi(x))} = \|v\|_{\tilde{g}(x)} \quad \text{und} \quad \angle_{g(\phi(x))}(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \angle_{\tilde{g}(x)}(v, w).$$

Mit $(\phi \circ \gamma)'(t) = D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)$ folgt weiter

$$L_g(\phi \circ \gamma) = \int_I \|D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\|_{g(\phi(\gamma(t)))}\, dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\tilde{g}(\gamma(t))}\, dt = L_{\tilde{g}}(\gamma).$$

Schließlich liefert der Transformationssatz und Satz 5.1

$$A_g(\phi(E)) = \int_{\phi(E)} \sqrt{\det G} = \int_E \sqrt{\det G} \circ \phi |\det D\phi| = \int_E \sqrt{\det\left(D\phi^{\mathrm{T}}(G \circ \phi) D\phi\right)} = A_{\tilde{g}}(E).$$

□

Ein zentrales Hilfsmittel der Kurventheorie war die Umparametrisierung nach der Bogenlänge. Es stellt sich die Frage, ob es für Flächen $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ ebenfalls besonders günstige und natürliche Parametrisierungen gibt. Folgende drei Möglichkeiten werden durch unsere bisherige Diskussion nahegelegt:

(1) F heißt längentreu parametrisiert, falls $L(F \circ \gamma) = L_{\mathbb{R}^2}(\gamma)$ für alle Kurven $\gamma : I \to U$.

(2) F heißt flächentreu parametrisiert, falls $A(F|_V) = A_{\mathbb{R}^2}(V)$ für alle Mengen $V \subset U$.

(3) F heißt winkeltreu (oder konform) parametrisiert, falls $\angle(DF \cdot v, DF \cdot w) = \angle_{\mathbb{R}^2}(v, w)$ für alle $x \in U$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Diese drei Eigenschaften lassen sich in Bedingungen für die erste Fundamentalform g übersetzen, und zwar wie folgt:

Lemma 5.3 *Für eine regulär parametrisierte Fläche $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit erster Fundamentalform $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ gelten folgende Aussagen:*

(1) *F ist längentreu* $\quad \Leftrightarrow \quad G = (\delta_{ij})$,

(2) *F ist flächentreu* $\quad \Leftrightarrow \quad \det G = 1$,

(3) *F ist winkeltreu* $\quad \Leftrightarrow \quad G = \lambda^2(\delta_{ij})$ *für eine Funktion* $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$.

Insbesondere: längentreu $\quad \Leftrightarrow \quad$ flächentreu und winkeltreu.

Beweis: Nach Lemma 5.1 ist $L(F\circ\gamma) = L_g(\gamma)$, also folgt aus $g_{ij} = \delta_{ij}$ direkt die Längentreue von F. Umgekehrt betrachten wir für beliebige $x_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$ die Kurve $\gamma(t) = x_0 + tv$ und folgern aus der Längentreue

$$\sqrt{g(x_0)(v,v)} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \sqrt{g(x_0+tv)(v,v)}\,dt = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_g(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_{\mathbb{R}^2}(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = |v|,$$

also durch Polarisation $g_{ij} = \delta_{ij}$. Damit ist (1) gezeigt. Aus $\det G = 1$ folgt die Flächentreue direkt nach Definition 5.3. Ist umgekehrt F flächentreu, so gilt für beliebiges $x_0 \in U$ mit $D_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \varepsilon\}$

$$\sqrt{\det G(x_0)} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon(x_0)} \sqrt{\det G} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A(F|_{D_\varepsilon(x_0)}) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A_{\mathbb{R}^2}(D_\varepsilon(x_0)) = 1.$$

Ist schließlich F winkeltreu und $e_{1,2}$ die Standardbasis, so folgt mit Lemma 5.2

$$g_{12} = \|e_1\|_g\,\|e_2\|_g\,\cos\angle(DF\cdot e_1, DF\cdot e_2) = \|e_1\|_g\,\|e_2\|_g\,\cos\angle_{\mathbb{R}^2}(e_1,e_2) = 0,$$

$$g_{11} - g_{22} = g(e_1+e_2, e_1-e_2) = \|e_1+e_2\|_g\,\|e_1-e_2\|_g\,\cos\angle_{\mathbb{R}^2}(e_1+e_2, e_1-e_2) = 0.$$

Die Darstellung in (3) gilt also mit $\lambda = \sqrt{(g_{11}+g_{22})/2} > 0$. Die umgekehrte Implikation in (3) folgt direkt aus Lemma 5.2. $\square$

Um eine längentreue bzw. flächentreue bzw. winkeltreue Umparametrisierung einer gegebenen Fläche $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ herzustellen, ist nach Satz 5.1 ein Diffeomorphismus $\phi : V \to U$ zu bestimmen , der folgende Gleichungen löst:

$$\begin{aligned} \tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G\circ\phi)\,D\phi &= \mathrm{E}_2 && \text{für} \quad \tilde{F} = F\circ\phi \text{ längentreu},\\ \det\tilde{G} = (\det G)\circ\phi\,(\det D\phi)^2 &= 1 && \text{für} \quad \tilde{F} = F\circ\phi \text{ flächentreu},\\ \tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G\circ\phi)\,D\phi &\in \mathbb{R}^+\mathrm{E}_2 && \text{für} \quad \tilde{F} = F\circ\phi \text{ winkeltreu}. \end{aligned}$$

Die Bedingung der Längentreue führt auf drei Bedingungen für zwei gesuchte Funktionen ϕ^1 und ϕ^2. Es könnte der Verdacht aufkommen, dass dieses Problem überbestimmt ist, also nicht immer gelöst werden kann. Dieser Verdacht ist in der Tat berechtigt.

Beispiel 5.8 (Unmöglichkeit längentreuer Landkarten) Angenommen, es gibt eine längentreue Parametrisierung $F : D_r \to F(D_r) \subset \mathbb{S}^2$, wobei $D_r = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < r\}$. Nach Drehung können wir $F(0) = e_3$ annehmen. Wegen $DF(0)^{\mathrm{T}}DF(0) = G(0) = (\delta_{ij})$ ist dann $DF(0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ orthogonal, und nach Drehung um die e_3-Achse und evtl. Spiegelung gilt $DF(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Wir betrachten jetzt für $v \in \mathbb{S}^1$ die Kurve $\gamma_v : [0,r) \to \mathbb{S}^2$, $\gamma_v(s) = F(sv)$. Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{S}^2$ eine beliebige rektifizierbare Kurve mit $\gamma(a) = e_3$ und $\gamma(b) = \gamma_v(\varrho)$ für ein $\varrho \in [0,r)$, so folgt mit $\tau = \max\{t \in [a,b] : \gamma([a,t]) \subset F(\overline{D_\varrho})\}$

$$L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[0,\tau]}) = L_{\mathbb{R}^2}(F^{-1}\circ\gamma|_{[0,\tau]}) \geq \varrho = L(\gamma_v|_{[0,\varrho]}).$$

Nach Satz 2.5 muss γ_v auf $[0,\varrho]$ einen Großkreisbogen ohne Richtungsumkehr durchlaufen. Wegen $|\gamma_v'| = |DF(sv)v| = |v| = 1$ und $\gamma_v'(0) = DF(0)v = v$ erhalten wir

$$F(sv) = \gamma_v(s) = (\cos s)e_3 + (\sin s)v \qquad \text{für alle } s \in [0,r),\ v \in \mathbb{S}^1.$$

Für $0 < \varrho < r$ folgt $L(F(\partial D_\varrho)) = 2\pi\sin\varrho < 2\pi\varrho = L_{\mathbb{R}^2}(\partial D_\varrho)$, das heißt F ist doch nicht längentreu, ein Widerspruch.

Die Bedeutung der winkeltreuen (oder konformen) Parametrisierung liegt in dem Bezug zur komplexen Analysis. Sei $F : U \to V$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$, also insbesondere $\det DF > 0$. Nach Lemma 5.3(3) ist F genau dann winkeltreu bezüglich des Standardskalarprodukts, wenn $DF^{\mathrm{T}} DF = \lambda^2 \mathrm{E}_2$ für eine Funktion $\lambda > 0$, das heißt $\frac{1}{\lambda} DF$ ist orthogonal. Schreiben wir $F = (u, v) = u + iv$, so bedeutet das

$$DF(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+ \mathbb{SO}(2) \quad \text{bzw. äquivalent} \quad u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x.$$

Die orientierungserhaltenden, winkeltreuen Diffeomorphismen sind also genau die holomorphen Diffeomorphismen. Hat man nun zwei winkeltreue Parameterdarstellungen einer Fläche, und ist der Parameterwechsel orientierungserhaltend, so ist der Parameterwechsel holomorph. Dies ist der Anfangspunkt der Theorie der Riemannschen Flächen, also der eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten.

Satz 5.2 (Existenz konformer Parameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann gibt es zu $w_0 \in U$ eine Umgebung $\tilde{U}$ und einen Diffeomorphismus $\phi \in C^\infty(V, \tilde{U})$, so dass $F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ winkeltreu (konform) parametrisiert ist.*

Der Beweis dieses Satzes erfordert die lokale Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung und kann an dieser Stelle nicht geführt werden. Der erste Beweis stammt von Gauß*. Er setzte voraus, dass die Koordinatenfunktionen $F^i = F^i(x, y)$ der gegeben Fläche reell-analytisch sind, das heißt sie sind lokal als Potenzreihen in den Variablen x und y darstellbar, und erhält dann die Lösung ebenfalls als lokal konvergente Potenzreihe. Der erste Beweis für glatte Flächen stammt von L. Lichtenstein (1911).

Wir wollen schließlich kurz auf die flächentreuen Parametrisierungen eingehen. Der lokale Existenzbeweis kann auf die Lösung eines Anfangswertproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert werden.

Satz 5.3 (Existenz flächentreuer Parameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $w_0 \in U$. Dann gibt es eine Umgebung $\tilde{U}$ von w_0 und einen Diffeomorphismus $\phi : V \to \tilde{U}$, so dass $F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ flächentreu parametrisiert ist.*

Beweis: Wir können $w_0 = 0$ annehmen, und machen für ϕ den Ansatz

$$\phi(x, y) = (x, \varphi(x, y)) \text{ mit } \varphi(0, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

Wie nach Lemma 5.2 gezeigt, ist $F \circ \phi$ genau dann flächentreu, wenn $\det(G \circ \phi)\,(\det D\phi)^2 = 1$. Der Satz ist also bewiesen, wenn φ glatte Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\det G(x, \varphi(x, y))}} \quad \text{und} \quad \varphi(x, 0) = 0.$$

Nach Picard-Lindelöf besitzt dieses Problem für $|x|, |y| < \delta$ eine eindeutige Lösung, die glatt von x und y abhängt.† □

*C. F. Gauß: Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Preisschrift für die Kopenhagener Akademie der Wissenschaften, 1825

†vgl. J. Dieudonné: Foundations of modern analysis, Academic Press, New York and London 1969, §X,7

6 Die zweite Fundamentalform einer Fläche

Wir kommen jetzt zur Definition der Krümmung einer Fläche. Da eine Fläche in verschiedenen Richtungen unterschiedlich gekrümmt sein kann, erwarten wir nicht, die Krümmung nur durch eine Funktion zu erfassen. Stattdessen lassen wir uns von der Idee leiten, dass die Krümmung die Normalkomponente der zweiten Ableitungen sein sollte, vgl. die entsprechende Definition 3.1 für Kurven.

Definition 6.1 (zweite Fundamentalform) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Einheitsnormale $N : U \to \mathbb{S}^2$ längs F. Die von $x \in U$ abhängige symmetrische Bilinearform*

$$h(x)(v,w) = \langle D^2F(x)(v,w), N(x)\rangle \quad (v,w \in \mathbb{R}^2)$$

heißt zweite Fundamentalform von F. Bezüglich der Standardbasis hat h die Koeffizienten

$$h_{ij} : U \to \mathbb{R},\ h_{ij}(x) = \langle \partial^2_{ij}F(x), N(x)\rangle \quad (1 \leq i,j \leq 2).$$

In einem Skalarproduktraum kann man jeder Bilinearform kanonisch eine lineare Abbildung zuordnen. Dies ist zum Beispiel deshalb wichtig, weil man dann von den Eigenwerten der Bilinearform reden kann, und zwar meint man die Eigenwerte der zugeordneten Abbildung. Wir wollen diese Tatsache aus der linearen Algebra kurz wiederholen.

Lemma 6.1 *Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt und $h(\cdot,\cdot)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$h(v,w) = g(v, Sw) \quad \textit{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

Ist h symmetrisch, so ist S selbstadjungiert bezüglich g, das heißt es gilt

$$g(Sv,w) = g(v,Sw) \quad \textit{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Es sei (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}), das heißt

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k \quad \text{für } i,k = 1,\ldots,n. \tag{6.2}$$

Wir definieren S durch seine Matrixdarstellung, und zwar sei $Se_l = \sum_{j=1}^n S_l^j e_j$ mit

$$S_l^j = \sum_{k=1}^n g^{jk} h_{kl} \quad \text{für } j,l = 1,\ldots,n.$$

Gleichung (6.1) folgt, denn für $v = e_i$ und $w = e_l$ gilt

$$g(e_i, Se_l) = \sum_{j=1}^n g_{ij}\, S_l^j = \sum_{k=1}^n \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n g_{ij}\, g^{jk}}_{=\delta_i^k}\Big) h_{kl} = h_{il}.$$

Die Eindeutigkeit von S mit (6.1) ist offensichtlich, ebenso die Selbstadjungiertheit von S, wenn h symmetrisch ist. □

Definition 6.2 *Sei $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N längs F, und h die zugehörige zweite Fundamentalform. Die eindeutig bestimmte, von $x \in U$ abhängige lineare Abbildung $S(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit*

$$h(x)(v,w) = g(x)\big(S(x)v,w\big) \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^2 \tag{6.3}$$

heißt Weingartenabbildung von F. Bezüglich der Standardbasis hat sie die Matrixdarstellung

$$S(x)e_k = \sum_{i=1}^{2} S_k^i(x) e_i \quad \text{mit } S_k^i(x) = \sum_{j=1}^{2} g^{ij}(x)\, h_{jk}(x). \tag{6.4}$$

Die Weingartenabbildung S ist selbstadjungiert bezüglich g für alle $x \in U$.

Im allgemeinen ist die Standardbasis keine g-Orthonormalbasis, und die Matrix von S ist nicht symmetrisch bezüglich der Standardbasis.

Beispiel 6.1 Für Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ haben wir in Beispiel 5.1 und Beispiel 5.3 die Normale und die erste Fundamentalform berechnet:

$$N = \frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \quad \text{und} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_xf_y \\ f_xf_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}$$

Die zweite Fundamentalform ergibt sich ohne weiteres zu

$$(h_{ij}) = \big(\langle \partial_{ij}F, N\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Weingartenabbildung brauchen wir die Inverse von (g_{ij}):

$$(g^{ij}) = \frac{1}{1+f_x^2+f_y^2} \begin{pmatrix} 1+f_y^2 & -f_xf_y \\ -f_xf_y & 1+f_x^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt nach etwas Rechnung die Matrix der Weingartenabbildung:

$$S = \frac{1}{(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} (1+f_y^2)\, f_{xx} - f_xf_y\, f_{xy} & (1+f_y^2)\, f_{xy} - f_xf_y\, f_{yy} \\ (1+f_x^2)\, f_{xy} - f_xf_y\, f_{xx} & (1+f_x^2)\, f_{yy} - f_xf_y\, f_{xy} \end{pmatrix}.$$

Hat der Graph im Punkt $(z_0, f(z_0)) \in U \times \mathbb{R}$ eine horizontale Tangentialebene, das heißt es gilt $Df(z_0) = 0$, so folgt bezüglich der nach oben weisenden Normalen

$$g_{ij}(z_0) = \delta_{ij}, \quad \partial_i g_{jk}(z_0) = 0, \quad h_{ij}(z_0) = S_j^i(z_0) = \partial_{ij}^2 f(z_0). \tag{6.5}$$

Beispiel 6.2 Für eine Rotationsfläche $F(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ hatten wir in Beispiel 5.2 ausgerechnet:

$$N = \frac{1}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}} \begin{pmatrix} -h'\cos\varphi \\ -h'\sin\varphi \\ r' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DF = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r'\sin\varphi & r\cos\varphi \\ h' & 0 \end{pmatrix},$$

und ferner in Beispiel 5.4

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (r')^2 + (h')^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich für die zweite Fundamentalform

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \begin{pmatrix} r'h'' - h'r'' & 0 \\ 0 & rh' \end{pmatrix},$$

und schließlich die Weingartenabbildung

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{h'}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \dfrac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Die geneigten Leser mögen überprüfen, dass der erste Eintrag in der Matrix von S genau die Krümmung der ebenen Kurve $c(t) = (r(t), h(t))$ ist; betrachten Sie zum Beispiel den Fall, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Satz 6.1 (Weingartengleichung) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche mit zweiter Fundamentalform h und Weingartenabbildung S bezüglich der Normalen N. Dann gilt*

$$DN = -DF \cdot S \quad \textit{und} \quad h(v, w) = -\langle DN \cdot v, DF \cdot w \rangle.$$

Beweis: Für $1 \leq j, k \leq 2$ gilt $\langle \partial_j N, N \rangle = \frac{1}{2} \partial_j |N|^2 = 0$ sowie

$$\langle \partial_j N, \partial_k F \rangle = \partial_j \underbrace{\langle N, \partial_k F \rangle}_{=0} - \langle N, \partial^2_{jk} F \rangle = -h(e_j, e_k) = -g(Se_j, e_k) = -\langle DF \cdot Se_j, DF \cdot e_k \rangle.$$

Es folgt $DN \cdot e_j = -DF \cdot Se_j$, also die erste Behauptung, und weiter

$$h(v, w) = g(Sv, w) = \langle DF \cdot Sv, DF \cdot w \rangle = -\langle DN \cdot v, DF \cdot \rangle.$$

Die folgenden einfachen Anwendungen sind analog zu den Sätzen 2.1 und 2.2 für Kurven.

Satz 6.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, und $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche mit Normale N und zweiter Fundamentalform h. Dann sind äquivalent:*

(1) *$F(U)$ liegt in einer Ebene.*

(2) *$h = 0$.*

(3) *N ist konstant.*

Beweis: Liegt $F(U)$ in einer affinen Ebene $p + E$, so bilden $\partial_i F$ eine Basis von E und folglich ist N Normalenvektor von E. Aber $\partial^2_{ij} F$ liegt in E, also $h = \langle D^2 F, N \rangle = 0$.

Aus $h = 0$ bzw. $S = 0$ folgt mit der Weingartengleichung $DN = -DF \cdot S = 0$.

Ist N konstant, so folgt $D\langle F, N \rangle = \langle DF, N \rangle + \langle F, DN \rangle = 0$, also ist $\langle F, N \rangle$ konstant. □

Satz 6.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche und $R > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$F(U)$ liegt in einer Sphäre mit Radius R.*

(2) *$h = \pm\frac{1}{R} g$ bzw. $S = \pm\frac{1}{R}\mathrm{Id}$.*

Beweis: Betrachte für $m \in \mathbb{R}^3$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}|F(x) - m|^2$ mit Ableitungen

$$\partial_j f = \langle F - m, \partial_j F\rangle \quad \text{und} \quad \partial^2_{ij} f = \langle F - m, \partial^2_{ij} F\rangle + g_{ij}.$$

Bezeichnet m den Mittelpunkt der Sphäre in (1), so ist die Funktion f konstant. Es folgt $F - m \perp \operatorname{Bild} DF$, also $F - m = \pm RN$, und weiter

$$0 = \partial^2_{ij} f = \langle \pm R\,N, \partial^2_{ij} F\rangle + g_{ij} = \pm R\,h_{ij} + g_{ij}.$$

Umgekehrt folgt aus Satz 6.1 und (2), dass die Funktion $m := F \mp RN$ konstant ist:

$$\partial_j m = \partial_j F \mp R\,\partial_j N = \partial_j F \mp R\,DF \cdot Se_j = \partial_j F \mp R\,DF \cdot (\pm\frac{1}{R} e_j) = 0.$$

Wegen $F = m \pm R\,N$ liegt F damit auf einer Sphäre vom Radius R. $\square$

Satz 6.4 (Transformationsverhalten von h und S) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit zweiter Fundamentalform h bezüglich der Normalen N.*

(1) *Ist $\tilde{F} = F \circ \phi$ Umparametrisierung mit einem C^2-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$, so folgt für die zweite Fundamentalform von $\tilde{F}$ bzgl. der Normalen $\tilde{N} = N \circ \phi$*

$$\tilde{h}(v, w) = h \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w) \quad \textit{bzw.} \quad \tilde{h}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} h_{kl} \circ \phi\, \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l,$$

oder äquivalent für die Weingartenabbildung

$$\tilde{S} = (D\phi)^{-1}\,(S \circ \phi)\,D\phi.$$

(2) *Unter einer Euklidischen Bewegung $\tilde{F} = QF + a$ mit $Q \in \mathbb{O}(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ folgt $\tilde{h} = h$ und $\tilde{S} = S$, bzgl. der Normalen $\tilde{N} = QN$.*

Beweis: Aus Satz 6.1, der Weingartengleichung, erhalten wir

$$\tilde{h}(v, w) = -\langle D\tilde{N} \cdot v, D\tilde{F} \cdot w\rangle = -\langle (DN) \circ \phi\, D\phi \cdot v, (DF) \circ \phi\, D\phi \cdot w\rangle = h \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w).$$

Die Koordinatendarstellung ergibt sich hieraus wie in Satz 5.1 durch Einsetzen von e_i, e_j. Weiter folgt mit Definition 6.2 und Satz 5.1

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x)(v, w) &= h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= g(\phi(x))(S(\phi(x))D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= g(\phi(x))(D\phi(x)D\phi(x)^{-1}S(\phi(x))D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= \tilde{g}(x)(D\phi(x)^{-1}S(\phi(x))D\phi(x)v, w).
\end{aligned}$$

Mit Definition 6.2 folgt die Transformationsformel für S. Für Behauptung (2) berechnen wir

$$\tilde{h}_{ij}(x) = \langle \partial^2_{ij}(QF + a)(x), QN(x)\rangle = \langle Q\,\partial^2_{ij} F(x), QN(x)\rangle = h_{ij}(x).$$

Die Gleichheit $\tilde{S} = S$ folgt nun aus Satz 5.1(2) und Definition 6.2. $\square$

Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert eine Basis v_1, v_2 von $\mathbb{R}^2$ mit

$$g(x)(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad h(x)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij} \quad \text{für gewisse } \varkappa_{1,2} \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Dies ist eine wohlbekannte Tatsache aus der linearen Algebra, doch der nachfolgende Beweis ist instruktiv. Sei $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ eine Orthonormalbasis bezüglich $g(x)$; eine solche Basis kann aus einer beliebigen Basis mit dem Verfahren von Gram-Schmidt hergestellt werden. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(x)} = 1$ besitzt dann eine Darstellung $v = (\cos t)w_1 + (\sin t)w_2$ mit $t \in [0, 2\pi]$, und es gilt

$$h(x)(v,v) = h(x)(w_1, w_1)\,\cos^2 t + h(x)(w_2, w_2)\,\sin^2 t + 2\,h(x)(w_1, w_2)\,\sin t \cos t.$$

Die rechte Seite ist 2π-periodisch und stetig in t, nimmt also ihr Infimum an einer Stelle $t_1 \in [0, 2\pi)$ an. Die Vektoren $v_1 = \cos(t_1)w_1 + \sin(t_1)w_2$ und $v_2 = -\sin(t_1)w_1 + \cos(t_1)w_2$ bilden dann wieder eine Orthonormalbasis bezüglich $g(x)$, und es folgt

$$0 = \frac{d}{d\tau} h(x)\big((\cos\tau)v_1 + (\sin\tau)v_2, (\cos\tau)v_1 + (\sin\tau)v_2\big)|_{\tau=0} = 2\,h(x)(v_1, v_2).$$

Also sind v_1, v_2 wie in (6.6) verlangt. Darüber hinaus gilt für $v = (\cos t)v_1 + (\sin t)v_2$

$$h(x)(v,v) = \varkappa_1\,\cos^2 t + \varkappa_2\,\sin^2 t \in [\varkappa_1, \varkappa_2] \quad \text{mit } \varkappa_i = h(x)(v_i, v_i) \text{ für } i = 1, 2,$$

das heißt die Funktion $v \mapsto h(x)(v,v)$ hat unter der Nebenbedingung $\|v\|_{g(x)} = 1$ in $v = v_1$ das Minimum $h(x)(v_1, v_1) = \varkappa_1$ und in $v = v_2$ das Maximum $h(x)(v_2, v_2) = \varkappa_2$. Wegen

$$g(x)(S(x)v_i, v_j) = h(x)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij} = g(x)(\varkappa_i v_i, v_j)$$

sind die $v_{1,2}$ genau die Eigenvektoren der Weingartenabbildung zu den Eigenwerten $\varkappa_{1,2}$.

Definition 6.3 (Hauptkrümmungen) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Fläche mit erster Fundamentalform g und Weingartenabbildung S. Die beiden Eigenwerte $\varkappa_1, \varkappa_2$ von $S(x)$ heißen Hauptkrümmungen von F im Punkt $x \in U$, die zugehörigen Eigenvektoren von $S(x)$ mit Normierung $\|v\|_{g(x)} = 1$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen. Ferner heißen*

$$H = \frac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2) \quad \text{und} \quad K = \varkappa_1 \varkappa_2$$

mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung von F in $x \in U$.

Die Hauptkrümmungen hängen nicht von der Wahl der Parametrisierung ab, sie sind geometrische Invarianten: sei $\tilde{F} = F \circ \phi$ eine Umparametrisierung der Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ mit dem Diffeomorphismus $\phi \in C^2(V, U)$. Ist $v \in \mathbb{R}^2$ Hauptkrümmungsrichtung von $\tilde{F}$ mit Hauptkrümmung $\varkappa$ im Punkt $x \in V$, so folgt

$$\|D\phi(x)v\|_{g(\phi(x))} = \|v\|_{\tilde{g}(x)} = 1,$$

$$S(\phi(x))D\phi(x)v = D\phi(x)\tilde{S}(x)D\phi(x)^{-1}D\phi(x)v = \varkappa\,D\phi(x)v.$$

Also ist $D\phi(x)v$ Hauptkrümmungsrichtung von F im Punkt $\phi(x)$ zum gleichen Eigenwert. Beachten Sie $DF(\phi(x)D\phi(x)v = D\tilde{F}(x)v$, das heißt v und $D\phi(x)v$ entsprechen demselben Tangentialvektor der Fläche in $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 6.3 Für das Helikoid $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(s,t) = (s\cos t, s\sin t, at)$, mit $a > 0$ gilt

$$\partial_1 F = (\cos t, \sin t, 0), \quad \partial_2 F = (-s\sin t, s\cos t, a), \quad N = \frac{1}{(s^2+a^2)^{1/2}}(a\sin t, -a\cos t, s),$$

und weiter

$$\partial_{11} F = (0,0,0), \quad \partial_{12} F = \partial_{21} F = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \partial_{22} F = -(s\cos t, s\sin t, 0).$$

Für die erste und zweite Fundamentalform ergibt sich

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{s^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{s^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für die Weingartenabbildung und die Hauptkrümmungsrichtungen

$$S = -\frac{a}{s^2+a^2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{s^2+a^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat das Helikoid die mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung

$$H = 0 \quad \text{und} \quad K = -\Big(\frac{a}{s^2+a^2}\Big)^2.$$

Beispiel 6.4 Die Rotationsfläche $F(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ hat als Hauptkrümmungsrichtungen

$$v_1 = \frac{e_1}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{e_2}{r(t)},$$

mit zugehörigen Hauptkrümmungen

$$\varkappa_1 = \frac{r'h''-h'r''}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}^3} \quad \text{und} \quad \varkappa_2 = \frac{h'}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}}\,\frac{1}{r}.$$

Beispiel 6.5 Die mittlere und Gaußsche Krümmung einer in Graphendarstellung gegebenen Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ lauten

$$\begin{aligned} H &= \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}, \\ K &= \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}. \end{aligned}$$

Anstatt von einer gegebenen Fläche auszugehen und deren Krümmungen zu berechnen, kann man umgekehrt das Problem betrachten, eine Fläche mit vorgeschriebener Krümmungsfunktion zu bestimmen: zu einer gegebenen Funktion $H : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H = H(x,y,z)$ sucht man also einen Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$, der in jedem Punkt $F(x,y)$ die mittlere Krümmung $H(F(x,y))$ hat. Analog kann man die Gaußsche

Krümmung als Funktion $K : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $K = K(x, y, z)$, vorschreiben. Gesucht sind dann also Lösungen der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung

$$\frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} = H(x, y, f(x, y))$$

bzw. der Monge-Ampére Gleichung

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = K(x, y, f(x, y)).$$

Diese Probleme haben die Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen im 20. Jahrhundert maßgeblich beeinflusst.

Wir wollen nun ähnlich wie bei Kurven eine lokale Normalform für Flächen herleiten.

Satz 6.5 (Lokale Normalform von Flächen) *Sei $\tilde{F} : V \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^k-Fläche für $k \geq 1$ mit Normale $\tilde{N}$. Dann existiert zu $w_0 \in V$ eine Euklidische Bewegung $B(X) = QX + a$ mit $Q \in \mathbb{SO}(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$, eine Umgebung $W \subset V$ von w_0 und ein C^k-Diffeomorphismus $\phi : W \to U$ mit $\phi(w_0) = 0$, so dass für $F = B \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$ Folgendes gilt:*

(1) *$F(z) = (z, f(z))$ für alle $z \in U$, wobei $f \in C^k(U)$ mit $f(0) = 0$ und $Df(0) = 0$.*

(2) *$f(x, y) = \frac{1}{2}\big(\tilde{\varkappa}_1 x^2 + \tilde{\varkappa}_2 y^2\big) + o(x^2 + y^2)$, falls $k \geq 2$.*

Dabei sind $\tilde{\varkappa}_{1,2}$ die Hauptkrümmungen von $\tilde{F}$ in w_0 bezüglich der Normalen $\tilde{N}$.

Beweis: Wähle $Q \in \mathbb{SO}(3)$ mit $Q\big(\mathrm{Bild}\, D\tilde{F}(w_0)\big) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ sowie $Q\tilde{N}(w_0) = e_3$, und setze $B(X) = Q(X - \tilde{F}(w_0))$. Bezeichnet π die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$, so folgt

$$B(\tilde{F}(w_0)) = 0 \quad \text{und} \quad \ker D(\pi \circ B \circ \tilde{F})(w_0) = \ker\big(\pi \circ Q \circ D\tilde{F}(w_0)\big) = \{0\}.$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung W von w_0, so dass

$$\phi := \pi \circ B \circ \tilde{F} : W \to \phi(W) =: U$$

ein C^k-Diffeomorphismus ist mit $\phi(w_0) = 0$. Nun folgt für $F = B \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1}$

$$\pi \circ F = (\pi \circ B \circ \tilde{F}) \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_U.$$

Also gilt $F(z) = (z, f(z))$ mit $f = F^3 \in C^k(U)$. Weiter folgt

$$F(0) = B(\tilde{F}(\phi^{-1}(0))) = B(\tilde{F}(w_0)) = 0,$$

insbesondere $f(0) = F^3(0) = 0$, und wegen $DF(0) = Q\, D\tilde{F}(w_0)\, D\phi^{-1}(0)$

$$\mathrm{Bild}\, DF(0) \subset Q\big(\mathrm{Bild}\, D\tilde{F}(w_0)\big) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \quad \Rightarrow \quad Df(0) = DF^3(0) = 0.$$

Damit ist Behauptung (1) gezeigt. Um (2) zu erreichen, drehen wir die Fläche um die z-Achse. Für $R \in \mathbb{SO}(2)$ setzen wir genauer

$$Q_R = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{SO}(3),$$

und betrachten die neuen Daten

$$
\begin{aligned}
B_R &= Q_R \circ B, \\
\phi_R &= R \circ \phi : W \to R(U) = U_R, \qquad \text{insbesondere } \phi_R(w_0) = 0, \\
F_R &= B_R \circ \tilde{F} \circ \phi_R^{-1} = Q_R \circ F \circ R^{-1} : U_R \to \mathbb{R}^3, \\
f_R &= f \circ R^{-1} : U_R \to \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Dann gilt $f_R(0) = 0$ sowie $Df_R(0) = Df(0)R^{-1} = 0$, und F_R ist Graph von f_R:

$$F_R(z) = Q_R(F(R^{-1}z)) = Q_R(R^{-1}z, f(R^{-1}z)) = (z, f_R(z)).$$

Die Aussagen unter (1) bleiben also für F_R und B_R gültig. Seien nun $v_{1,2}$ Hauptkrümmungsrichtungen von F im Nullpunkt. Dann gilt $\langle v_i, v_j \rangle = g(0)(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, vgl. (6.5), und o.B.d.A. sind v_1, v_2 positiv orientiert. Mit $Rv_i = e_i$ für $i = 1, 2$ erhalten wir wegen (6.5)

$$D^2 f_R(0)(v,v) = \frac{d^2}{ds^2} f_R(sv)|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} f(sR^{-1}v)|_{s=0} = D^2 f(0)(R^{-1}v, R^{-1}v).$$

Die symmetrischen Bilinearformen links und rechts sind also gleich. Nun ist $D^2 f(0) = h(0)$ die zweite Fundamentalform von F im Punkt $z = 0$, siehe (6.5), außerdem haben F und $\tilde{F}$ dieselben Hauptkrümmungen. Es ergibt sich

$$D^2 f_R(0)(e_i, e_j) = h(0)(R^{-1}e_i, R^{-1}e_j) = h(0)(v_i, v_j) = \tilde{\varkappa}_i \delta_{ij}.$$

Also erfüllt f_R auch Bedingung (2), und der Satz ist bewiesen. $\square$

Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(z) = (z, f(z))$ eine in lokaler Normalform gegebene Fläche, und N Einheitsnormale mit $N(0) = e_3$. Dann können wir die zweite Fundamentalform $h(0)$ bzw. genauer ihre quadratische Form $h(0)(v,v)$ wie folgt geometrisch interpretieren. Für $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(0)} = |v| = 1$ heißt

$$\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(s) = F(sv) = (sv, f(sv))$$

Normalschnitt bei $0 \in U$ in Richtung v. Es gilt $\gamma'(0) = v$, und γ verläuft in der durch v, e_3 aufgespannten Ebene E. Wir legen in E eine $90°$-Drehung fest durch die Bedingung $Jv = e_3$. Bezüglich dieser Wahl hat der Normalschnitt γ die Krümmung

$$\varkappa = \langle \gamma''(0), J\gamma'(0) \rangle = D^2 f(0)(v,v) = h(0)(v,v).$$

Ist $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ beliebige reguläre Fläche und $\|v\|_{g(x)} = 1$, so heißt $h(x)(v,v)$ Normalkrümmung von F im Punkt x in Richtung v. Sind $\varkappa_{1,2}$ die Hauptkrümmungen zu den Hauptkrümmungsrichtungen $v_{1,2}$, so gilt

$$h(x)(v,v) = \cos^2(t)\varkappa_1 + \sin^2(t)\varkappa_2 \qquad \text{für } v = \cos(t)v_1 + \sin(t)v_2.$$

Die Hauptkrümmungen sind also die Extremwerte der Normalkrümmung. Dies hatten wir schon bei der Definition der Hauptkrümmungen festgestellt, siehe (6.6).

Bei der folgenden Definition sei daran erinnert, dass die Gaußsche Krümmung als Produkt der beiden Hauptkrümmungen bzw. Determinante der Weingartenabbildung nicht von der Wahl der Normalen abhängt.

Definition 6.4 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Gaußscher Krümmung K. Der Punkt $x \in U$ heißt*

$$\begin{aligned} \textit{elliptisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) > 0, \\ \textit{hyperbolisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) < 0, \\ \textit{parabolisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) = 0. \end{aligned}$$

Folgerung 6.1 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Normale N und Gaußscher Krümmung K. Dann gelten für $z_0 \in U$ folgende Aussagen:*

(1) *Ist $K(z_0) > 0$, so gibt es eine Umgebung V von z_0 mit $\langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle \neq 0$ für alle $z \in V \backslash \{z_0\}$, das heißt F liegt lokal auf einer Seite der affinen Tangentialebene.*

(2) *Ist $K(z) < 0$, so hat dagegen die Funktion $z \mapsto \langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle$ in jeder Umgebung von z_0 sowohl strikt positive als auch strikt negative Werte.*

Beweis: Wir können annehmen, dass F in Normalform gegeben ist, das heißt es ist $z_0 = 0$, $N(z_0) = e_3$ und $F(z) = (z, f(z))$ mit

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2\big) + o(x^2 + y^2).$$

Es gilt dann $\langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle = f(z)$. Betrachte nun eine Folge $z_k = (x_k, y_k) \neq 0$ mit $z_k \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $z_k/|z_k| \to (\xi, \eta) \in \mathbb{S}^1$, und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{|z_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x_k^2 + \varkappa_2 y_k^2\big)}{|z_k|^2} = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1 \xi^2 + \varkappa_2 \eta^2\big).$$

Ist zum Beispiel $\varkappa_{1,2} > 0$ in $z_0 = 0$, so zeigt ein Widerspruchsargument $f(z) > 0$ für $z \neq 0$ nahe bei $z_0 = 0$. Ist dagegen $\varkappa_1 < 0 < \varkappa_2$ in $z_0 = 0$, so folgt direkt $f(se_1) < 0$ und $f(se_2) > 0$ für s hinreichend klein. □

Definition 6.5 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Normale N und erster bzw. zweiter Fundamentalform g bzw. h. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(x)} = 1$ heißt Asymptotenrichtung im Punkt $x \in U$, falls $h(x)(v, v) = 0$.*

Seien $\varkappa_1 \leq \varkappa_2$ die beiden Hauptkrümmungen in $x \in U$, mit Hauptkrümmungsrichtungen v_1 und v_2, und $K(x) = \varkappa_1 \varkappa_2$ die Gaußsche Krümmung in $x \in U$. Die folgende Tabelle gibt die Asymptotenrichtungen v (bis aufs Vorzeichen) an:

$K(x) < 0$	$\varkappa_1 < 0 < \varkappa_2$	$v = \sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_2 - \varkappa_1}} v_1 \pm \sqrt{\frac{-\varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1}} v_2$,
$K(x) > 0$	$\varkappa_{1,2} > 0$, $\varkappa_{1,2} < 0$	es gibt keine Asymptotenrichtungen,
$K(x) = 0$	$\varkappa_1 = 0 < \varkappa_2$	$v = v_1$,
	$\varkappa_1 < 0 = \varkappa_2$	$v = v_2$,
	$\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$	v beliebig.

Definition 6.6 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche. Eine reguläre Kurve $\gamma : I \to U$ heißt*

$$\begin{aligned} &\textit{Krümmungslinie} &\Leftrightarrow\quad &\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \textit{ ist Hauptkrümmungsrichtung für alle } t \in I,\\ &\textit{Asymptotenlinie} &\Leftrightarrow\quad &\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \textit{ ist Asymptotenrichtung für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Beispiel 6.6 Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ eine Rotationsfläche. Für festes $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $t \mapsto (t, \varphi)$ eine Krümmungslinie, ebenso für festes $t \in I$ die Kurve $\varphi \mapsto (t, \varphi)$. Dies folgt daraus, dass in der gegebenen Parametrisierung die Weingartenabbildung diagonalisiert ist, siehe Beispiel 6.4.

7 Die Gleichungen $H = 0$ und $K = 0$

In diesem Kapitel wollen wir einen Blick auf die beiden Gleichungen $H = 0$ beziehungsweise $K = 0$ werfen, und damit als Beispielklassen die Minimalflächen und die Regelflächen einführen. Die Minimalflächen treten in der Natur als Seifenhäute auf, die in einen Draht eingespannt sind. Die Seifenhaut minimiert unter dieser Nebenbedingung ihre Oberfläche und befindet sich deshalb in einem Spannungsgleichgewicht. Genau diesen Aspekt wollen wir mathematisch erfassen. Wir beginnen mit zwei Hilfsaussagen, die aber von allgemeinem Interesse sind.

Lemma 7.1 (Zerlegung in Normal- und Tangentialkomponente) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N und erster Fundamentalform g. Dann gibt es zu jeder vektorwertigen Funktion $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $\xi : U \to \mathbb{R}^2$ mit $X = DF \cdot \xi + \langle X, N\rangle N$, und zwar gilt, wenn (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}) bezeichnet,*

$$\xi = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle X, \partial_i F\rangle e_j,$$

Ist $F \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^3)$ und $X \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$, so ist $\xi \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar wegen $\ker DF = \{0\}$. Für ξ wie in der Behauptung folgt

$$\langle DF \cdot \xi, \partial_k F\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle X, \partial_i F\rangle \langle \partial_j F, \partial_k F\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \langle X, \partial_i F\rangle g^{ij} g_{jk} = \langle X, \partial_k F\rangle.$$

Hieraus folgt leicht $X = DF \cdot \xi + \langle X, N\rangle N$. □

Als zweites brauchen wir die wohlbekannte Regel für die Ableitung der Determinante. Im Fall $n = 2$ kann diese auch explizit überprüft werden, da die Formeln für die Determinante und die inverse Matrix sehr einfach sind.

Lemma 7.2 *Ist $G : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ in $t = 0$ differenzierbar und $\det\big(G(0)\big) \neq 0$, so gilt*

$$\frac{d}{dt}\big(\det G\big)|_{t=0} = \det\big(G(0)\big)\,\mathrm{tr}\,\big(G(0)^{-1}G'(0)\big).$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage erst im Fall $G(0) = \mathrm{E}_n$. Nach Definition gilt

$$\det(G) = g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{nn} + \sum_{\sigma \in S_n \backslash \{\mathrm{id}\}} \mathrm{sign}\,(\sigma) g_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n\sigma(n)}.$$

Nun gilt $g_{ij}(t) = \delta_{ij} + g'_{ij}(0)t + o(t)$, und für $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \det(G)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} g'_{ii}(0) = \mathrm{tr}\, G'(0).$$

Für $G(0) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ beliebig verwenden wir $\det\big(G(t)\big) = \det\big(G(0)\big) \det\big(G(0)^{-1}G(t)\big)$, und erhalten wegen $\big(G(0)^{-1}G\big)'(0) = G(0)^{-1}G'(0)$ die gewünschte Formel

$$\frac{d}{dt} \det(G)|_{t=0} = \det\big(G(0)\big)\, \mathrm{tr}\, \big(G(0)^{-1}G'(0)\big).$$

□

Definition 7.1 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit mittlerer Krümmung H bezüglich der Normalen N. Der mittlere Krümmungsvektor von F ist dann die Funktion*

$$\vec{H} = 2HN : U \to \mathbb{R}^3.$$

$\vec{H}$ ist unabhängig von der Wahl der Normalen N definiert.

Wir wollen jetzt noch eine Notation zur Integration auf Flächen einführen. Für eine C^1-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit erster Fundamentalform g und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\int_U f\, dA_g = \int_U f \sqrt{\det G} \quad \text{für } G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}, \tag{7.1}$$

falls das rechte Integral im Sinn von Riemann oder Lebesgue definiert ist. In diesem Zusammenhang nennt man dA_g auch das induzierte Flächenelement von F. Präzise ist durch $A_g(E) = \int_E \sqrt{\det G}$ ein Maß auf U definiert, und (7.1) ist einfach das Integral bezüglich dieses Maßes. Bei einer Umparametrisierung $\tilde{F} = F \circ \phi$ mit $\phi \in C^1(V, U)$ liefert Satz 5.1 in Verbindung mit dem Transformationssatz

$$\int_V f \circ \phi\, dA_{\tilde{g}} = \int_V (f \sqrt{\det G}) \circ \phi\, |\det D\phi| = \int_U f\, dA_g \quad \text{für } f : U \to \mathbb{R}.$$

Das Integral ist also invariant unter Umparametrisierungen, vergleiche (5.1).

Satz 7.1 (Erste Variation des Flächeninhalts) *Sei $F(\cdot, t) : U \to \mathbb{R}^3$, $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, eine Einparameterschar von regulären Flächen, so dass gilt:*

(1) $F \in C^2(U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \mathbb{R}^3)$,

(2) *$F(\cdot, 0)$ ist regulär und $A\big(F(\cdot, 0)\big) < \infty$,*

(3) *Es gibt eine kompakte Menge $K \subset U$, so dass $F(\cdot, t) = F(\cdot, 0)$ auf $U \backslash K$.*

Dann ist $F(\cdot,t)$ regulär für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \subset (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, und mit $\phi = \partial_t F$ gilt

$$\frac{d}{dt}\,A(F) = -\int_U \langle \vec{H}, \phi\rangle\, dA_g \qquad \text{für } t \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Beweis: Die Regularität von $F(\cdot,t)$ für $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ folgt leicht mit einem Widerspruchsargument aus (2) und (3). Wir berechnen als erstes

$$\partial_t g_{ij} = \partial_t \langle \partial_i F, \partial_j F\rangle = \langle \partial_i \phi, \partial_j F\rangle + \langle \partial_i F, \partial_j \phi\rangle.$$

Mit Lemma 7.2 folgt

$$\partial_t \sqrt{\det(G)} = \frac{1}{2}\sqrt{\det(G)} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\partial_t g_{ji} = \sqrt{\det(G)} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\langle \partial_j F, \partial_i \phi\rangle.$$

Durch Vertauschen des Integrals mit der Parameterableitung nach t folgt

$$\frac{d}{dt}A(F) = \int_U \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\langle \partial_j F, \partial_i \phi\rangle\, dA_g. \tag{7.2}$$

Betrachte nun erst den Fall, dass ϕ ein normales Variationsfeld ist, das heisßt $\phi = \varphi N$ mit $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Dann folgt aus der Weingartengleichung

$$\partial_i \phi = \partial_i(\varphi N) = \varphi\, \partial_i N + (\partial_i \varphi)\, N = -\varphi\, DF \cdot Se_i + (\partial_i \varphi)\, N,$$

und weiter mit $2H = \operatorname{tr} S = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} h_{ij}$ und (7.2)

$$\frac{d}{dt}A(F) = -\int_U \varphi \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} h_{ij}\, dA_g. = -\int_U \langle \vec{H}, \phi\rangle\, dA_g.$$

Als zweites sei $\phi = DF \cdot \xi$ für ein Vektorfeld $\xi \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$ mit $\xi = 0$ auf $U \backslash K$. Sei $\psi : U \times \mathbb{R} \to U$ der Fluss von ξ, das heißt

$$\partial_s \psi(x,s) = \xi(\psi(x,s)) \quad \text{und} \quad \psi(x,0) = x.$$

Die Abbildungen $\psi(\cdot,s) : U \to U$ sind C^1-Diffeomorphismen mit $\psi(\cdot,s) = \mathrm{id}$ auf $U\backslash K$, und es gilt $\partial_s(F\circ\psi)|_{s=0} = DF \cdot \xi$. Also folgt mit (7.2) und der Invarianz des Flächeninhalts unter Umparametrisierungen

$$\frac{d}{dt}A(F) = \frac{\partial}{\partial s}A(F\circ\psi)|_{s=0} = 0 = -\int_U \langle \vec{H}, \phi\rangle\, dA_g.$$

Da sich jedes Vektorfeld ϕ in der Form $\phi = \varphi\nu + DF \cdot \xi$ schreiben lässt nach Lemma 7.1, ist der Satz bewiesen. □

Definition 7.2 *Eine reguläre Fläche $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$ heißt Minimalfläche.*

Die untenstehende Folgerung besagt, dass die Minimalflächengleichung $H = 0$ äquivalent dazu ist, dass die Ableitung des Flächeninhalts für alle normalen Variationen mit kompaktem Träger gleich Null ist. Analog zu der Situation bei Extremwerten reeller Funktionen bedeutet die Bedingung nicht, dass der Flächeninhalt unter den gegebenen Randbedingungen tatsächlich minimiert wird, sondern es ist lediglich eine notwendige Bedingung.

Folgerung 7.1 (Variationscharakterisierung der Minimalflächen) *Für eine reguläre C^2-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $H = 0$.

(2) $\frac{d}{dt}A(F + t\phi)|_{t=0} = 0$ *für alle normalen Variationen* $\phi = \varphi N$, *mit* $\varphi \in C_c^\infty(U)$.

Beweis: Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) folgt direkt aus Satz 7.1, und umgekehrt liefert der Satz

$$\int_U \varphi H \sqrt{\det(G)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A(F + t\varphi N)|_{t=0} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Ein Standardargument, das Fundamentallemma der Variationsrechung, zeigt nun $H = 0$. ☐

Als Beispiel für Minimalflächen haben wir bereits das Helikoid kennengelernt, siehe Beispiel 6.3. Um weitere Beispiele zu berechnen, wollen wir aus Satz 7.1 eine Umformulierung der Minimalflächengleichung herleiten. Dazu führen wir für eine Riemannsche Metrik $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ den folgenden Differentialoperator ein:

$$\Delta_g : C^2(U) \to C^0(U),\ \Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_i\big(\sqrt{\det G}\, g^{ij}\partial_j u\big).$$

Δ_g heißt Laplace-Beltrami-Operator von g.

Folgerung 7.2 *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ mit erster Fundamentalform g und mittlerem Krümmungsvektor $\vec{H}$ gilt*

$$\vec{H} = \Delta_g F.$$

Beweis: Nach Satz 7.1 und (7.2) gilt für alle $\phi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} -\int_U \langle \vec{H}, \phi\rangle\, dA_g &= \frac{d}{dt}A(F + t\phi)|_{t=0} \\ &= \int_U \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\langle \partial_j F, \partial_i \phi\rangle \sqrt{\det G} \\ &= -\int_U \Big\langle \sum_{i,j=1}^{2} \partial_i(\sqrt{\det G}\, g^{ij}\partial_j F), \phi \Big\rangle \\ &= -\int_U \langle \Delta_g F, \phi\rangle\, dA_g. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wiederum aus dem Fundamentallemme der Variationsrechnung. ☐

Beispiel 7.1 (Katenoid) Für eine Rotationsfläche

$$F : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(z,\varphi) = (r(z)\cos\varphi, r(z)\sin\varphi, z), \qquad \text{wobei } r : (a,b) \to (0,\infty),$$

ergibt sich nach Beispiel 5.4

$$\vec{H} = \frac{1}{r\sqrt{(r')^2+1}} \left(\partial_z \Big(\frac{r}{\sqrt{(r')^2+1}} \partial_z F \Big) + \partial_\varphi \Big(\frac{\sqrt{(r')^2+1}}{r} \partial_\varphi F \Big) \right).$$

Sei nun F eine Minimalfläche. Wegen $\partial_\varphi F^3 = 0$ folgt aus $\vec{H}^3 = 0$

$$\frac{d}{dz} \frac{r}{\sqrt{(r')^2+1}} = 0.$$

Die Gleichung wird gelöst durch die Funktionen

$$r_{a,z_0}(z) = a \cosh \frac{z - z_0}{a} \qquad \text{mit } a > 0,\ z_0 \in \mathbb{R}.$$

Bis auf vertikale Translationen und Streckungen beschreiben diese Funktionen nur eine Fläche, das sogenannte Katenoid. Eine genauere Analyse zeigt, dass das Katenoid und die Ebene die einzigen Rotationsminimalflächen sind.

Beispiel 7.2 Der mittlere Krümmungsvektor eines Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x, y, f(x,y))$ lautet mit $v = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

$$\begin{aligned}
\vec{H}^1 &= \frac{1}{v} \left(\Big(\frac{1+f_y^2}{v} \Big)_x - \Big(\frac{f_x f_y}{v} \Big)_y \right) \\
\vec{H}^2 &= \frac{1}{v} \left(-\Big(\frac{f_x f_y}{v} \Big)_x + \Big(\frac{1+f_x^2}{v} \Big)_y \right) \\
\vec{H}^3 &= \frac{1}{v} \left(\Big(\frac{f_x}{v} \Big)_x + \Big(\frac{f_y}{v} \Big)_y \right).
\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir wegen $\vec{H}^3 = 2HN^3 = 2H/v$ folgende Darstellung der mittleren Krümmung, vgl. Beispiel 6.5,

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}}.$$

Bislang haben wir ausschließlich parametrisierte Flächen betrachtet. Der geometrische Charakter der eingeführten Größen und Begriffe ergab sich dabei aus den Transformationsformeln bei Parameterwechseln. Wir wollen nun einen globaleren Zugang darstellen, bei dem die Flächen als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ angesehen werden.

Definition 7.3 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt* 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit *(oder* eingebettete Fläche*) der Klasse C^k für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung Ω und eine Funktion $f \in C^k(\Omega)$ gibt, so dass gilt:*

(1) $M \cap \Omega = f^{-1}\{0\}$,

(2) $Df(q) \neq 0$ *für alle* $q \in \Omega$.

Beispiel 7.3 Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u \in C^k(U)$, so ist $M = \{(x,y,u(x,y)) : (x,y) \in U\}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^k. Denn zu $p = (x,y,u(x,y)) \in M$ können wir stets $\Omega = U \times \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z - u(x,y)$ wählen.

Beispiel 7.4 Die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞, und zwar kann man $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ und $f(x) = |x|^2 - 1$ wählen.

Lokal kann jede Untermannigfaltigkeit durch eine Parametrisierung beschrieben werden.

Definition 7.4 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^3$ *eine* 2*-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse* C^k*. Eine lokale Parametrisierung von* M *ist eine* C^k*-Abbildung* $F : U \to M \subset \mathbb{R}^3$ *mit* $U \subset \mathbb{R}^2$ *offen, so dass* F *injektiv und* $\operatorname{rang} DF(x) = 2$ *für alle* $x \in U$*. Wir nennen* U *das Parametergebiet und* $V = F(U) \subset M$ *das Kartengebiet von* F*; die Abbildung* $F^{-1} : V \to U$ *heißt Karte.*

Satz 7.2 (Existenz und Eigenschaften von Karten) *Sei* $M \subset \mathbb{R}^3$ *eine* 2*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *der Klasse* C^k*. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Jedes* $p \in M$ *liegt im Gebiet einer geeigneten Karte.*

(2) *Ist* $F : U \to F(U) = V$ *lokale Parametrisierung, so ist* V *offen bezüglich der Relativtopologie in* M *und* $F^{-1} : V \to U$ *ist stetig, also* $F : U \to V$ *homeomorph.*

(3) *Für lokale Parametrisierungen* $F_i : U_i \to V_i$ $(i = 1,2)$ *ist die Parametertransformation* $F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ *ein* C^k*-Diffeomorphismus.*

Beweis: Nach dem Satz über implizite Funktionen ist M lokal als Graph darstellbar: zu $p \in M$ gibt es eine eigentliche Bewegung $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $B(p) = 0$, offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ und $I \subset \mathbb{R}$ sowie $u \in C^k(U, I)$, so dass gilt:

$$B(M) \cap (U \times I) = \{(x, u(x)) : x \in U\},$$

insbesondere $(0,0) \in U \times I$ und $u(0) = 0$. Die Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = B^{-1}(x, u(x))$, ist dann eine lokale Parametrisierung wie in (1) verlangt, mit $p = F(0) \in F(U)$. Für den Beweis von (2) und (3) verweisen wir auf Satz 10.4 in unserem Skript Analysis III *. $\square$

Wir kommen nun zur Definition der Tangentialebene einer Untermannigfaltigkeit.

Definition 7.5 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^3$ *eine* 2*-dimensionale* C^1*-Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$*. Der Vektor* $X \in \mathbb{R}^3$ *heißt Tangentialvektor in* $p \in M$*, falls es eine Kurve* $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ *gibt mit*

$$\gamma(0) = p \quad \text{und} \quad \gamma'(0) = X.$$

Satz 7.3 *Sei* $M \subset \mathbb{R}^3$ *eine* 2*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *der Klasse* C^1*. Dann ist die Menge aller Tangentialvektoren in* $p \in M$ *ein* 2*-dimensionaler Unterraum von* $\mathbb{R}^3$*, der Tangentialraum* T_pM*. Genauer gilt:*

*http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/lehre/skripten/

(1) $T_pM = \operatorname{Bild} DF(x)$, *falls* $F : U \to M$ *lokale Parametrisierung mit* $F(x) = p$.

(2) $T_pM = \ker Df(p)$, *falls* $M \cap \Omega = f^{-1}\{0\}$ *für* $f \in C^1(\Omega)$ *mit* $Df \neq 0$ *auf* Ω.

Zum Beweis zeigt man $\operatorname{Bild} DF(x) \subset T_pM \subset \ker Df(p)$, und die Behauptung folgt aus Dimensionsgründen. Wir können jetzt die erste und zweite Fundamentalform einer Untermannigfaltigkeit als Bilinearformen auf dem Tangentialraum erklären. Der Vorteil dieses Zugangs ist, dass nicht mehr auf eine spezielle Parametrisierung Bezug genommen wird. Die folgende Tabelle stellt dar, wie die Größen erster Ordnung – Tangentialraum, Normale und erste Fundamentalform – zu übersetzen sind.

	Parametrisierung $F : U \to \mathbb{R}^3$	Niveaufläche $f^{-1}\{0\} \subset \mathbb{R}^3$	Relation $F(x) = p$
Tangentialraum	$\operatorname{Bild} DF(x)$	$\ker Df(p)$	T_pM
Tangentialvektor	$DF(x)v$	$X \in T_pM$	$DF(x)v = X$
Normale	$N = \frac{F_x \times F_y}{\lvert F_x \times F_y \rvert}$	$\tilde{N} = \frac{Df}{\lvert Df \rvert}$	$N = \pm \tilde{N} \circ F$
1. Fundamentalform	$g(\cdot,\cdot)$	$\langle \cdot,\cdot \rangle = \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$	$g(v,w) = \langle DF \cdot v, DF \cdot w \rangle$
Bogenlänge	$L_g(\gamma)$	$L(c) = L_{\mathbb{R}^3}(c)$	$L_g(\gamma) = L(F \circ \gamma)$
Winkel	$\angle_g$	$\angle = \angle_{\mathbb{R}^3}$	$\angle_g(v,w) = \angle(DF \cdot v, DF \cdot w)$
Flächeninhalt	$A_g(E)$	$\mathcal{H}^{2\dagger}$	$A_g(E) = \mathcal{H}^2(F(E))$

Wir wollen diese Tabelle um die Krümmungsgrößen erweitern. Dazu ist vor allem die zweite Fundamentalform $\tilde{h}$ einer Untermannigfaltigkeit konsistent zu definieren, das heißt

$$\tilde{h}(DF \cdot v, DF \cdot w) = h(v,w) \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^2.$$

Dabei schreiben wir $\tilde{N}$, $\tilde{h}$ usw. für Größen, die nicht auf eine Parametriserung Bezug nehmen.

Lemma 7.3 *Sei* $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ *eine reguläre Fläche,* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *eine Umgebung von* $p = F(x)$ *und* $f \in C^2(\Omega)$ *mit* $f \circ F \equiv 0$ *und* $Df \neq 0$ *nahe bei* p. *Dann gilt*

$$h(x)(v,w) = -\frac{D^2 f(p)(DF(x)v, DF(x)w))}{|Df(p)|} \quad \textit{bezüglich } N = \frac{Df}{|Df|} \circ F.$$

Beweis: Durch Differentiation der Gleichung $f \circ F = 0$ nach e_j und e_i ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^{3} \partial_l f(F(y)) \partial_j F^l(y), \\ 0 &= \sum_{k,l=1}^{3} \partial^2_{kl} f(p) \partial_i F^k(x) \partial_j F^l(x) + \sum_{l=1}^{3} \partial_l f(p) \partial^2_{ij} F^l(x). \end{aligned}$$

Mit $N^l(x) = \partial_l f(p)/|Df(p)|$ und der Definition der zweiten Fundamentalform folgt

$$|Df(p)|\, h_{ij}(x) = -\sum_{k,l=1}^{3} \partial^2_{kl} f(p) \partial_i F^k(x) \partial_j F^l(x),$$

und das Lemma ist bewiesen. $\square$

Definition 7.6 *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit, und $M \cap \Omega = f^{-1}\{0\}$ für $f \in C^2(\Omega)$ mit $Df \neq 0$ auf Ω. Dann sind die zweite Fundamentalform und die Weingartenabbildung in $p \in M \cap \Omega$ wie folgt definiert:*

$$\tilde{h}(p)(X,Y) = \langle X, \tilde{S}(p)Y \rangle = -\frac{D^2 f(p)(X,Y)}{|Df(p)|} \quad \text{für } X, Y \in T_pM \subset \mathbb{R}^3.$$

Mit Lemma 7.3 ergibt sich

$$\langle DF \cdot v, DF \cdot Sw \rangle = g(v, Sw) = h(v,w) = \tilde{h}(DF \cdot v, DF \cdot w) = \langle DF \cdot v, \tilde{S} \cdot DF \cdot w \rangle.$$

Also gilt

$$\tilde{S} \cdot DF = DF \cdot S \tag{7.3}$$

Weiter wollen wir auch die Weingartengleichung im eingebetteten Kontext formulieren. Dazu brauchen wir den Begriff der differenziarbaren Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit.

Definition 7.7 *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Eine Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ ist von der Klasse C^1, falls $\varphi \circ F \in C^1(U)$ für jede lokale Parametrisierung $F : U \to W \subset M$ der Klasse C^1. Für $p = F(x)$ setzen wir*

$$D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R},\ D\varphi(p)DF(x)v = D(\varphi \circ F)(x)v.$$

Hier wurde benutzt, dass $DF(x) : \mathbb{R}^2 \to T_pM$ ein Isomorphismus ist. Die Definition von $D\varphi(p)$ hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab: ist $\tilde{F} = F \circ \phi$ für $\phi \in C^1(V,U)$ mit $x = \phi(y)$ und ist weiter $DF(x)v = D\tilde{F}(y)w$, so folgt $v = D\phi(y)w$ und

$$D(\varphi \circ \tilde{F})(y)w = D(\varphi \circ F)(x)D\phi(y)w = D(\varphi \circ F)(x)v.$$

Weiter ergibt sich aus der Definition, dass die Kettenregel gilt. Wir wenden dies an auf die differenzierbare Funktion $\tilde{N} : M \to \mathbb{R}^3$ und berechnen mit (7.3)

$$D\tilde{N} \cdot DF = D(\tilde{N} \circ F) = DN = -DF \cdot S = -\tilde{S} \cdot DF.$$

Also folgt $D\tilde{N} = -\tilde{S}$. Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

	Parametrisierung $F : U \to \mathbb{R}^3$	Niveaufläche $f^{-1}\{0\} \subset \mathbb{R}^3$	Relation $F(x) = p$
2. Fundamentalform	$h = \langle D^2F, N \rangle$	$\tilde{h} = -\frac{D^2 f}{\lvert Df \rvert}$	$h(v,w) = \tilde{h}(DF \cdot v, DF \cdot w)$
Weingartenabbildung	$h(v,w) = g(v, Sw)$	$\tilde{h}(X,Y) = \langle X, \tilde{S}Y \rangle$	$\tilde{S} \cdot DF = DF \cdot S$
Hauptkrümmungen	$Sv_i = \varkappa_i v_i$	$\tilde{S}V_i = \varkappa_i V_i$	$V_i = DF \cdot v_i$
Weingartengleichung	$DN = -DF \cdot S$	$D\tilde{N} = -\tilde{S}.$	

Beispiel 7.5 Als Beispiel betrachten $M = \{p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = 1\}$, wobei $f(p) = B(p,p)$ mit

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ B(p,q) = p^1 q^1 + p^2 q^2 - p^3 q^3.$$

Es gilt $f(p + tX) = f(p) + 2tB(p,X) + t^2 B(X,X)$, also folgt

$$Df(p)X = 2B(p,X), \quad D^2 f(p)(X,Y) = 2B(X,Y).$$

Insbesondere ist $Df(p)p = 2B(p,p) = 2$ für $p \in M$, also ist M eine 2-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Tangentialraum und Normale in $p \in M$ sind

$$T_p M = \{X \in \mathbb{R}^3 : B(p,X) = 0\} \quad \text{und} \quad N(p) = \frac{(p^1, p^2, -p^3)}{|p|}.$$

Die zweite Fundamentalform lautet

$$h(p)(X,Y) = -\frac{B(X,Y)}{|p|}.$$

Da M Rotationsfläche, sind die Hauptkrümmungsrichtungen wie folgt gegeben:

$$V_1(p) = \frac{(-p^2, p^1, 0)}{1 + (p^3)^2} \quad \text{und} \quad V_2(p) = \frac{(p^1 p^3, p^2 p^3, 1 + (p^3)^2)}{|p|\sqrt{1 + (p^3)^2}}.$$

In der Tat gilt, unter Beachtung von $(p^1)^2 + (p^2)^2 = 1 + (p^3)^2$,

$$B(p, V_i) = 0, \quad \langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \text{und} \quad \big(h(p)(V_i, V_j)\big) = \begin{pmatrix} -|p|^{-1} & 0 \\ 0 & |p|^{-3} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ergibt sich für die Gaußsche Krümmung der Fläche

$$K(p) = -\frac{1}{|p|^4},$$

das heißt M ist überall hyperbolisch und in jedem Punkt $p \in M$ existieren linear unabhängige Asymptotenrichtungen $V^\pm(p)$. Explizit lauten diese

$$V^\pm(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + |p|^2}} V_1(p) \pm \frac{|p|}{\sqrt{1 + |p|^2}} V_2(p).$$

Jedenfalls berechnen wir

$$B(p + tV^\pm(p), p + tV^\pm(p)) = B(p,p) + 2tB(p, V^\pm(p)) + t^2 B(V^\pm, V^\pm) = 1,$$

das heißt die Geraden durch $p \in M$ in den Asymptotenrichtungen $V^\pm(p)$ liegen auf der Fläche. Wir können die Fläche parametrisieren, indem wir längs $c(s) = (\cos s, \sin s, 0) \in M$ in Richtung $V^\pm$ laufen:

$$F(s,t) = c(s) + \frac{t}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, \pm 1).$$

Eine parametrisierte Fläche von diesem Typ, also mit $\partial_t^2 F \equiv 0$, nennt man Regelfläche.

8 Hauptsatz der Flächentheorie

Der Hauptsatz der Kurventheorie besagt, dass es eine bis auf Euklidische Bewegungen eindeutige, nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve gibt, die eine gegebene Krümmungsfunktion hat. Wir wollen jetzt eine entsprechende Aussage für Flächen diskutieren. Auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ seien Funktionen $(a_{ij}) \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ und $(b_{ij}) \in C^{k-2}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ gegeben, so dass gilt:

- (a_{ij}) ist symmetrisch und strikt positiv definit auf U,
- (b_{ij}) ist symmetrisch auf U.

Wir stellen folgende Fragen:

- Gibt es eine reguläre C^k-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit den Fundamentalformen $g_{ij} = a_{ij}$ und $h_{ij} = b_{ij}$?
- Wenn ja, ist diese Fläche bis auf eigentliche Bewegungen eindeutig bestimmt?

Allerdings wissen wir schon: es gibt keine Fläche F mit $g_{ij} = \delta_{ij}$ und $h_{ij} = \delta_{ij}$, denn nach Satz 6.3 bildet F in eine Sphäre ab, aber es gibt keine längentreuen Parametrisierungen der Sphäre nach Beispiel 5.8. Die Gleichungen $g_{ij} = a_{ij}$ und $h_{ij} = b_{ij}$ sind also nicht immer zu erfüllen, und es stellt sich die Frage, welche Hindernisse es gegen ihre Lösbarkeit gibt. Die Gleichungen stellen ein nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen für die gesuchte Fläche F dar. Wir werden für dieses System gewisse Integrabilitätsbedingungen herleiten und zeigen, dass diese notwendig und hinreichend für die lokale Lösbarkeit sind.

Für eine reguläre Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit Normale N verwenden wir im folgenden die Notation

$$X^\top = X - \langle X, N \rangle N \quad \text{für } X : U \to \mathbb{R}^3.$$

Definition 8.1 (kovariante Ableitung) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche. Für $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ bezeichne $\nabla_\xi \eta : U \to \mathbb{R}^2$ das eindeutig bestimmte Vektorfeld mit*

$$(D_\xi(D_\eta F))^\top = DF \cdot \nabla_\xi \eta.$$

Wir berechnen

$$D_\xi(D_\eta F) = \sum_{i,j=1}^{2} \xi^i \partial_i(\eta^j \partial_j F) = \sum_{i,j=1}^{2} \xi^i \eta^j \partial^2_{ij} F + \sum_{i,j=1}^{2} \xi^i (\partial_i \eta^j) \partial_j F = D^2 F(\xi, \eta) + DF \cdot D_\xi \eta.$$

Bezeichnet h die zweite Fundamentalform bezüglich N, so folgt die Darstellung

$$D_\xi(D_\eta F) = DF \cdot \nabla_\xi \eta + h(\xi, \eta) N. \tag{8.1}$$

Die Notation $\nabla_\xi \eta$ ist dadurch gerechtfertigt, dass folgende Differentiationsregeln gelten.

Satz 8.1 (Eigenschaften von ∇) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und C^1-Vektorfelder ξ, η erfüllt $\nabla_\xi \eta$ folgende Rechenregeln:*

(1) $\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = \lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta$ *und* $\nabla_\xi(\lambda\eta_1+\mu\eta_2) = \lambda\nabla_\xi\eta_1 + \mu\nabla_\xi\eta_2$ *(Linearität).*

(2) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi\nabla_\xi\eta$ *für* $\varphi \in C^1(U)$ *(Linearität bzgl. Funktionen in* ξ*).*

(3) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (D_\xi\varphi)\eta$ *(Produktregel in* η*).*

(4) $\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1$ *(Symmetrie).*

(5) $D_\xi\big(g(\eta_1,\eta_2)\big) = g(\nabla_\xi\eta_1,\eta_2) + g(\eta_1,\nabla_\xi\eta_2)$ *(Produktregel bzgl. g).*

Beweis: Die Eigenschaften (1),(2),(3) und (4) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Ableitung D mit Definition 8.1. Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage in (1):

$$DF\cdot\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = (D_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}(D_\eta F))^\top = \lambda(D_{\xi_1}(D_\eta F))^\top + \mu(D_{\xi_2}(D_\eta F))^\top = DF\cdot\big(\lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta\big).$$

Schließlich ergibt sich (5) aus

$$\begin{aligned}
D_\xi(g(\eta_1,\eta_2)) &= D_\xi\langle D_{\eta_1}F, D_{\eta_2}F\rangle \\
&= \langle D_\xi(D_{\eta_1}F), D_{\eta_2}F\rangle + \langle D_{\eta_1}F, D_\xi(D_{\eta_2}F)\rangle \\
&= \langle DF\cdot\nabla_\xi\eta_1, DF\cdot\eta_2\rangle + \langle DF\cdot\eta_1, DF\cdot\nabla_\xi\eta_2\rangle \\
&= g(\nabla_\xi\eta_1,\eta_2) + g(\eta_1,\nabla_\xi\eta_2).
\end{aligned}$$

□

Die Aussage zur Symmetrie von ∇ in Satz 8.1(4) muss für beliebige Vektorfelder $\xi,\eta : U \to \mathbb{R}^2$ geeignet modifiziert werden.

Folgerung 8.1 (Symmetrie der kovarianten Ableitung) *Ist* $F : U \to \mathbb{R}^3$ *reguläre* C^2*-Fläche, so gilt für Vektorfelder* $\xi,\eta \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$

$$\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi = [\xi,\eta].$$

Dabei ist $[\xi,\eta] = D_\xi\eta - D_\eta\xi = \sum_{i,j=1}^2(\xi^i\partial_i\eta^j - \eta^i\partial_i\xi^j)e_j$ *der Kommutator.*

Beweis: Durch Entwicklung in die Standardbasis und Verwendung von (1),(2),(3) und (4) aus Satz 8.1:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi &= \sum_{i,j=1}^2\big(\xi^i\nabla_{e_i}(\eta^j e_j) - \eta_i\nabla_{e_i}(\xi^j e_j)\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^2(\xi^i\partial_i\eta^j - \eta^i\partial_i\xi^j)e_j + \sum_{i,j=1}^2 \underbrace{(\xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i)}_{\text{schief}}\,\underbrace{\nabla_{e_i}e_j}_{\text{gerade}} \\
&= [\xi,\eta].
\end{aligned}$$

□

Definition 8.2 (Christoffelsymbole) *Sei* $F : U \to \mathbb{R}^3$ *eine* C^2*-Fläche mit kovarianter Ableitung* ∇*. Die eindeutig bestimmten Funktionen* $\Gamma^i_{jk} : U \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\nabla_{e_i}e_j = \sum_{k=1}^2\Gamma^i_{jk}e_k$$

heißen Christoffelsymbole von F*.*

Lemma 8.1 *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gilt:*

(1) $\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k$ *für* $k = 1, 2$.

(2) $\nabla_\xi \eta = D_\xi \eta + \Gamma(\xi, \eta)$ *mit* $\Gamma(\xi, \eta) = \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j e_k$.

Beweis: Behauptung (1) folgt direkt aus der Symmetrie, Satz 8.1(4):

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k e_k = \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{21}^k e_k.$$

Die zweite Aussage ergibt sich durch Entwicklung in die Standardbasis:

$$\nabla_\xi \eta = \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \nabla_{e_i}(\eta^j e_j) = \sum_{i,j=1}^2 \xi^i (\partial_i \eta^j) e_j + \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \eta^j \nabla_{e_i} e_j = D_\xi \eta + \sum_{i,j,k=1}^2 \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

□

Satz 8.2 (Levi-Cività) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche. Dann ist die kovariante Ableitung durch die erste Fundamentalform bestimmt. Genauer gilt für die Christoffelsymbole*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \tag{8.2}$$

Dabei ist (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}).

Beweis: Mit der Produktregel Satz 8.1(5) folgt

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{jl} &= \underbrace{g(\nabla_{e_i} e_j, e_l)}_{I} + \underbrace{g(\nabla_{e_i} e_l, e_j)}_{II} \\
\partial_j g_{il} &= \underbrace{g(\nabla_{e_j} e_i, e_l)}_{I} + \underbrace{g(\nabla_{e_j} e_l, e_i)}_{III} \\
\partial_l g_{ij} &= \underbrace{g(\nabla_{e_l} e_i, e_j)}_{II} + \underbrace{g(\nabla_{e_l} e_j, e_i)}_{III}.
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie, Satz 8.1(4), stehen rechts nur die drei Funktionen I, II, III, das heißt wir haben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i g_{jl} \\ \partial_j g_{il} \\ \partial_l g_{ij} \end{pmatrix}.$$

Da die Koeffizientenmatrix invertierbar ist, können wir $g(\nabla_{e_i} e_j, e_l)$ als Linearkombination der Funktionen $\partial_i g_{jl}, \partial_j g_{il}, \partial_l g_{ij}$ darstellen; daraus folgt schon die erste Behauptung des Satzes. Explizit ergibt sich durch Addition der ersten beiden Zeilen und Subtraktion der dritten Zeile

$$g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

beziehungsweise mit der Definition der Christoffelsymbole

$$\sum_{m=1}^{2} g_{lm}\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Multiplikation mit g^{kl} und Summation über l liefert

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl} g_{lm}\Gamma_{ij}^{m} = \Gamma_{ij}^{k}.$$

□

Wir bemerken, dass es aus der Definition der kovarianten Ableitung über den Tangentialanteil der zweiten Ableitung keineswegs offensichtlich ist, dass dieses Objekt nur von der ersten Fundamentalform abhängt, also beispielsweise unter längentreuen Verbiegungen invariant ist.

Satz 8.3 (Ableitungsgleichungen der Flächentheorie) *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ gelten die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j F &= \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}\partial_k F + h_{ij}N \\ \partial_i N &= -\sum_{j,k=1}^{2} h_{ij} g^{jk}\partial_k F. \end{aligned}$$

Dabei sind N die Normale, g und h die erste bzw. zweite Fundamentalform, und Γ_{ij}^{k} die Christoffelsymbole von F.

Beweis: Mit (8.1) und Definition 8.2 folgt

$$\partial_i\partial_j F = DF\cdot\nabla_{e_i} e_j + h_{ij}N = \sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k F + h_{ij}N.$$

Zweitens ergibt sich aus Satz 6.1 und der Definition der Weingartenabbildung

$$\partial_k N = -DF\cdot S e_k = -DF\cdot\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}h_{jk}e_i.$$

Durch Vertauschen von i,k folgt die zweite Gleichung. □

Es ist nun eine Schlüsselbeobachtung, dass die Ableitungsgleichungen als System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die drei vektorwertigen Funktionen $V_1 = \partial_1 F$, $V_2 = \partial_2 F$ und $V_3 = N$ aufgefasst werden können. Genauer erhalten wir das System

$$\partial_\alpha V_j = \sum_{i=1}^{3} A_{\alpha j}^{i} V_i \quad \text{für } \alpha = 1,2 \text{ und } j = 1,2,3, \tag{8.3}$$

wobei die Koeffizienten wie folgt gegeben sind:

$$A^i_{\alpha j} = \begin{cases} \Gamma^i_{\alpha j} & \text{für } 1 \le i, j \le 2, \\ h_{\alpha j} & \text{für } i = 3,\ 1 \le j \le 2, \\ -\sum_{\beta=1}^2 h_{\alpha\beta}\, g^{\beta i} & \text{für } 1 \le i \le 2,\ j = 3, \\ 0 & \text{für } i, j = 3. \end{cases} \tag{8.4}$$

Wie bei der Frage der Existenz von Stammfunktionen ergeben sich Integrabilitätsbedingungen durch das Vertauschen von Ableitungen. Differentiation von (8.3) nach e_β liefert

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\beta V_k &= \partial_\alpha \sum_{j=1}^3 A^j_{\beta k} V_j \\ &= \sum_{j=1}^3 (\partial_\alpha A^j_{\beta k}) V_j + \sum_{j=1}^3 A^j_{\beta k} (\partial_\alpha V_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 (\partial_\alpha A^j_{\beta k}) V_j + \sum_{i,j=1}^3 A^j_{\beta k} A^i_{\alpha j} V_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\partial_\alpha A^i_{\beta k} + \sum_{j=1}^3 A^i_{\alpha j} A^j_{\beta k} \right) V_i. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen von α, β erhalten wir, da V_1, V_2, V_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist,

$$\partial_\alpha A^i_{\beta k} - \partial_\beta A^i_{\alpha k} + \sum_{j=1}^3 (A^i_{\alpha j} A^j_{\beta k} - A^i_{\beta j} A^j_{\alpha k}) = 0. \tag{8.5}$$

Satz 8.4 (Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi) *Für eine reguläre C^3-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ gelten folgende Identitäten:*

$$\partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} + \sum_{\mu=1}^2 (\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}) = \sum_{\mu=1}^2 (h_{\alpha\mu} h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} h_{\beta\mu}) g^{\mu\lambda} \quad \textit{(Gaußgleichung)}. \tag{8.6}$$

$$\partial_\alpha h_{\beta\gamma} - \partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \sum_{\lambda=1}^2 (h_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - h_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}) = 0 \quad \textit{(Gleichung von Codazzi-Mainardi)}. \tag{8.7}$$

Beweis: Die Gaußgleichung ist (8.5) für $i = \lambda$, $k = \gamma$ mit $1 \le \lambda, \gamma \le 2$, wobei (8.4) eingesetzt wird und auf der rechten Seite die Terme mit $j = 3$ stehen. Die Gleichungen von Codazzi-Mainardi ergeben sich aus (8.5) für $i = 3$ und $k = \gamma = 1, 2$ entsprechend. Man kann sich davon überzeugen, dass sich der Fall $k = 3$ und $i = 1, 2$ ebenfalls auf die Gleichungen von Codazzi-Mainardi reduziert; der Fall $i = k = 3$ liefert trivialerweise keine Information. □

Folgerung 8.2 (Theorema egregium, Gauß 1828) *Ist $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^3-Fläche, so gilt für die Gaußsche Krümmung die Formel*

$$K = \frac{\sum_{\lambda=1}^2 g_{\lambda 1} \Big(\partial_1 \Gamma^\lambda_{22} - \partial_2 \Gamma^\lambda_{12} + \sum_{\mu=1}^2 (\Gamma^\lambda_{1\mu} \Gamma^\mu_{22} - \Gamma^\lambda_{2\mu} \Gamma^\mu_{12}) \Big)}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Insbesondere kann $K = \varkappa_1 \varkappa_2$ aus der ersten Fundamentalform berechnet werden.

BEWEIS: Wähle in den Gaußgleichungen (8.6) $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 2$, multipliziere mit $g_{\lambda 1}$ und summiere über $\lambda = 1, 2$. $\square$

Tatsächlich ist das Theorema egregium äquivalent zu den vollen Gaußgleichungen (8.6). Dies liegt daran, dass diese Gleichungen diverse Symmetrien unter Vertauschungen der Indizes besitzen, was wir aber jetzt nicht weiter untersuchen wollen. Wie in Beispiel 5.8 gezeigt und eingangs erwähnt, kann $\mathbb{S}^2$ nicht lokal längentreu parametrisiert wreden. Dieses Resultat können wir nun wesentlich verallgemeinern.

Folgerung 8.3 *Ist eine Fläche $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ lokal längentreu parametrisierbar, so ist ihre Gaußsche Krümmung identisch Null.*

BEWEIS: In einer längentreuen Parametrisierung ist $g_{ij} = \delta_{ij}$, also folgt die Behauptung aus Folgerung 8.2. $\square$

Das Theorema egregium von Gauß war richtungsweisend für die Entwicklung der Differentialgeometrie im 19. Jahrhundert. Zuerst wurde dieser Satz so verstanden, dass die Gaußsche Krümmung einer Fläche eben invariant ist unter längentreuen Verbiegungen. Für Riemann war das Ergebnis, in Verbindung mit der Entdeckung der hyperbolischen Geometrie durch Bolyai und Lobatschewski, aber Motivation, eine sogenannte innere Geometrie zu entwickeln, bei der die Flächen beziehungsweise Mannigfaltigkeiten abstrakt gegeben und nicht in einen Euklidischen Raum eingebettet sind. Das Theorema egregium besagt, das in solchen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein Krümmungsbegriff allein aus der Längenmessung heraus definiert werden kann. Riemann hat diese Ideen in seinem Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* dargelegt (Göttingen 1854), bei dem übrigens Gauß noch zugegen und angeblich sehr bewegt war. Die Riemannsche Geometrie ist die mathematische Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein 1916).

Satz 8.5 (Hauptsatz der Flächentheorie, Bonnet 1867) *Sei $U = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $3 \leq k \leq \infty$. Gegeben seien $(g_{\alpha\beta}) \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$, $(h_{\alpha\beta}) \in C^{k-2}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ mit g, h symmetrisch und g strikt positiv definit. Erfüllen dann g, h die Integrabilitätsbedingungen (8.6) und (8.7), wobei die $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ durch (8.2) definiert sind, so gibt es eine reguläre Fläche $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$, die g und h als erste bzw. zweite Fundamentalform hat. Diese Fläche ist bis auf Euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Bemerkung. Durch Fortsetzung der Lösung längs Wegen kann gezeigt werden, dass die Aussage des Satzes für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt.

BEWEIS: Vorab wählen wir zur Normierung eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} g_{ij}(0,0) & \text{für } 1 \leq i, j \leq 2, \\ 0 & \text{für } 1 \leq i \leq 2, j = 3, \\ 1 & \text{für } i = j = 3. \end{cases} \tag{8.8}$$

Ist w_1, w_2, w_3 eine andere Basis mit $\langle w_i, w_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$, so gilt $w_j = T v_j$ mit $T \in \mathbb{O}(3)$.

Ausgangspunkt des Beweises ist nun die Tatsache, dass die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie in der Formulierung (8.3), also

$$\partial_\alpha V_j = \sum_{i=1}^{3} A_{\alpha j}^i V_i \quad \text{mit } A_{\alpha j}^i \text{ aus (8.4)},$$

längs der x^α-Parameterlinien als lineares, homogenes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $V_1 = \partial_1 F, V_2 = \partial_2 F$ und $V_3 = N$ aufgefasst werden können. Nach (8.2) hängen die Koeffizienten dieses Systems nur von g und h ab. Ist daher $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Fläche mit erster und zweiter Fundamentalform g bzw. h, so folgt durch Anwendung der Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem – erst mit $\alpha = 1$ längs $x^1 \mapsto (x^1, 0)$, dann mit $\alpha = 2$ längs $x^2 \mapsto (x^1, x^2)$ – dass die Funktionen $\partial_1 F, \partial_2 F, N$ durch ihre Werte im Nullpunkt bestimmt sind. Da wir nach einer orthogonalen Abbildung $\partial_1 F(0,0) = v_1, \partial_2 F(0,0) = v_2$ und $N(0,0) = v_3$ annehmen können, und außerdem durch Translation $F(0,0) = 0 \in \mathbb{R}^3$ erreichen, ist F bis auf eine Euklidische Bewegung eindeutig bestimmt.

Zum Beweis der Existenz definieren wir in zwei Schritten eine Lösung V_1, V_2, V_3 von (8.3). Und zwar erhalten wir erst $V_j(x^1, 0)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_1 V_j(x^1, 0) = \sum_{i=1}^{3} A^i_{1j}(x^1, 0) V_i(x^1, 0) \quad \text{für } 1 \le j \le 3, \quad V_j(0,0) = v_j,$$

und dann $V_j(x^1, x^2)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_2 V_j(x^1, x^2) = \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j}(x^1, x^2) V_i(x^1, x^2) \quad \text{für } 1 \le j \le 3, \quad V_j(x^1, 0) = \text{ aus Schritt 1.}$$

Dann gilt (8.3) für $\alpha = 2$ auf ganz U per Definition. Um (8.3) für $\alpha = 1$ zu zeigen, setzen wir $W_j = \partial_1 V_j - \sum_{i=1}^3 A^i_{1j} V_i$ und berechnen mit den Integrabilitätsbedingungen (8.5)

$$\begin{aligned}
\partial_2 W_j &= \partial_1 \partial_2 V_j - \sum_{i=1}^{3} (\partial_2 A^i_{1j}) V_i - \sum_{i=1}^{3} A^i_{1j} \partial_2 V_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} (\partial_1 A^i_{2j} - \partial_2 A^i_{1j}) V_i + \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} \partial_1 V_i - \sum_{i,k=1}^{3} A^i_{1j} A^k_{2i} V_k \\
&= - \sum_{i,k=1}^{3} (A^i_{1k} A^k_{2j} - A^i_{2k} A^k_{1j}) V_i + \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} \partial_1 V_i - \sum_{i,k=1}^{3} A^i_{1j} A^k_{2i} V_k \\
&= \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} (\partial_1 V_i - \sum_{k=1}^{3} A^k_{1i} V_k) \quad \text{(nach Tausch von } i,k \text{ in der ersten Summe)} \\
&= \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j} W_i.
\end{aligned}$$

Die W_j erfüllen also längs $x^2 \mapsto (x^1, x^2)$ ebenfalls ein lineares, homogenes System. Da $W_j(x^1, 0) = 0$ nach Definition, folgt $W_j = 0$ auf ganz U aus dem Eindeutigkeitssatz, und die Gleichungen (8.3) sind verifiziert. Nach (8.4) sind die $A^i_{\alpha j} \in C^{k-2}$, und die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert $V_j \in C^{k-1}$. Als nächstes zeigen wir auf U die Gleichungen

$$\langle V_i, V_j \rangle = \begin{cases} g_{ij} & \text{für } 1 \le i,j \le 2, \\ 0 & \text{für } 1 \le i \le 2, j = 3, \\ 1 & \text{für } i = j = 3. \end{cases} \tag{8.9}$$

Dazu berechnen wir mit (8.4) für $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \langle V_\beta, V_\gamma \rangle &= \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha\beta} \langle V_i, V_\gamma \rangle + \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha\gamma} \langle V_\beta, V_i \rangle \\
&= \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \langle V_\lambda, V_\gamma \rangle + \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \langle V_\beta, V_\lambda \rangle + h_{\alpha\beta} \langle V_3, V_\gamma \rangle + h_{\alpha\gamma} \langle V_\beta, V_3 \rangle.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \langle V_\beta, V_3 \rangle &= \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha\beta} \langle V_i, V_3 \rangle + \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha 3} \langle V_\beta, V_i \rangle \\
&= \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \langle V_\lambda, V_3 \rangle + h_{\alpha\beta} \langle V_3, V_3 \rangle - \sum_{\gamma,\lambda=1}^{2} h_{\alpha\gamma} g^{\gamma\lambda} \langle V_\beta, V_\lambda \rangle.
\end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir

$$\partial_\alpha \langle V_3, V_3 \rangle = 2 \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha 3} \langle V_3, V_i \rangle = -2 \sum_{\beta,\lambda=1}^{2} h_{\alpha\beta} g^{\beta\lambda} \langle V_3, V_\lambda \rangle.$$

Multiplikation der Formel (8.2) für $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ mit $g_{\lambda\gamma}$ und Summation über λ ergibt andererseits

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} g_{\lambda\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}).$$

Vertauschen von β und γ und Addition liefert

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} g_{\lambda\gamma} + \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} g_{\lambda\beta}.$$

Sei $(a_{ij}) : U \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ die rechte Seite von (8.9), also $a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, $a_{3\beta} = a_{\beta 3} = 0$ und $a_{33} = 1$. Es ist leicht zu sehen, dass die (a_{ij}) dasselbe System lösen:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha a_{\beta\gamma} &= \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} a_{\lambda\gamma} + \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} a_{\beta\lambda} + h_{\alpha\beta} a_{3\gamma} + h_{\alpha\gamma} a_{\beta 3}, \\
\partial_\alpha a_{\beta 3} &= \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} a_{\lambda 3} + h_{\alpha\beta} a_{33} - \sum_{\gamma,\lambda=1}^{2} h_{\alpha\gamma} g^{\gamma\lambda} a_{\beta\lambda} \\
\partial_\alpha a_{33} &= -2 \sum_{\beta,\lambda=1}^{2} h_{\alpha\beta} g^{\beta\lambda} a_{3\lambda}.
\end{aligned}$$

Wie oben ist der Eindeutigkeitssatz längs Koordinatenlinien anwendbar. Mit der Wahl von $V_j(0,0) = v_j$ nach (8.8) folgt Behauptung (8.9). Wegen $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}$ nach (8.2) und $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ nach Voraussetzung gilt $A^i_{\alpha\beta} = A^i_{\beta\alpha}$ für $1 \leq i \leq 3$, das heißt $\partial_1 V_2 = \partial_2 V_1$. Auf U gibt es daher eine Funktion $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\partial_\alpha F = V_\alpha$ für $\alpha = 1, 2$. Es ist nun leicht zu sehen, dass F die gesuchte, reguläre Fläche mit erster Fundamentalform (g_{ij}) und zweiter Fundamentalform (h_{ij}) ist. $\square$

9 Resultate der inneren Geometrie

Wir haben gesehen, dass es unter den einer Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ zugeordneten geometrischen Größen einige gibt, die nicht wirklich von der Lage der Fläche im Raum abhängen, sondern allein von der ersten Fundamentalform (g_{ij}). Dazu gehören offensichtlich die Länge von Kurven (Lemma 5.1), der Winkel zwischen Tangentialvektoren (Lemma 5.2) und der Flächeninhalt (5.3). Weniger offensichtlich ist, dass auch die kovariante Ableitung, die über den Tangentialanteil der zweiten Ableitung definiert ist, nur von den g_{ij} abhängt (Satz 8.2), und dass schließlich die Gaußsche Krümmung allein aus den (g_{ij}) berechnet werden kann (Folgerung 8.2). In diesem Abschnitt wollen wir diese Größen weiter studieren und insbesondere den Satz von Gauß-Bonnet für Flächen im $\mathbb{R}^3$ diskutieren.

Wir beginnen mit dem Begriff der kovarianten Ableitung längs einer Kurve. Im folgenden tritt oft die Situation auf, dass eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^k$ längs einer Kurve $\gamma : I \to U$ auszuwerten ist, das heißt es wird die Verkettung $f \circ \gamma$ betrachtet. Aus Gründen der Lesbarkeit werden wir diese Verkettung jedoch nicht immer explizit hinschreiben.

Lemma 9.1 *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N, $\gamma \in C^2(I, U)$ und $\xi \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt längs γ*

$$\frac{d}{dt}(DF \cdot \xi) = DF \cdot \frac{\nabla \xi}{dt} + h(\gamma', \xi)N.$$

Dabei ist h die zweite Fundamentalform bezüglich N und

$$\frac{\nabla \xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \Gamma(\gamma', \xi).$$

Beweis: Wir berechnen mit den Ableitungsgleichungen, Satz 8.3, längs γ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(DF \cdot \xi) &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{2}(\partial_j F)\xi^j \\
&= \sum_{j=1}^{2}(\partial_j F)\,(\xi^j)' + \sum_{i,j=1}^{2}(\partial^2_{ij} F)\,(\gamma^i)'\xi^j \\
&= \sum_{j=1}^{2}(\partial_j F)\,(\xi^j)' + \sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma^k_{ij}\,(\gamma^i)'\xi^j\partial_k F + \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\,(\gamma^i)'\xi^j N \\
&= DF \cdot \Big(\frac{d\xi}{dt} + \Gamma(\gamma', \xi)\Big) + h(\gamma', \xi)\,N.
\end{aligned}$$

□

Lemma 9.2 (Rechenregeln für $\frac{\nabla}{dt}$) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Für die kovariante Ableitung längs einer Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$ gelten dann folgende Rechenregeln:*

(1) $\dfrac{\nabla(\lambda\xi + \mu\eta)}{dt} = \lambda\dfrac{\nabla\xi}{dt} + \mu\dfrac{\nabla\eta}{dt}$ *für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

(2) $\dfrac{\nabla(\varphi\xi)}{dt} = \varphi\dfrac{\nabla\xi}{dt} + \varphi'\xi$ *für $\varphi \in C^1(I)$.*

(3) $\displaystyle \frac{d}{dt} g(\xi,\eta) = g\Big(\frac{\nabla\xi}{dt},\eta\Big) + g\Big(\xi,\frac{\nabla\eta}{dt}\Big).$

Beweis: Die Aussagen folgen aus den Eigenschaften der gewöhnlichen Ableitung, vergleiche Satz 8.1, Aussagen (1),(3) und (5). $\square$

Lemma 9.3 (Symmetrie von ∇) *Sei $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ reguläre Fläche. Dann gilt für $f \in C^2(I \times J, U)$, $f = f(t,\varepsilon)$*

$$\frac{\nabla}{\partial\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}.$$

Beweis: Nach Lemma 9.1 gilt

$$\frac{\nabla}{\partial\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial t} + \Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon},\frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Die Behauptung folgt aus der Symmetrie der Christoffelsymbole, Lemma 8.1(1). $\square$

Für die Euklidische Metrik $(g_{ij}) = (\delta_{ij})$ ist $\frac{\nabla\xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$ die gewöhnliche Ableitung, insbesondere ist ein Vektorfeld mit $\frac{\nabla\xi}{dt} = 0$ konstant. Wenn wir uns vorstellen, dass der Vektor $\xi(t)$ im Punkt $\gamma(t)$ angeheftet ist, entsteht $\xi(t)$ also durch Parallelverschiebung von $\xi(a)$ längs γ. Allgemein ist die Gleichung

$$\frac{\nabla\xi}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\xi}{dt} + \Gamma\circ\gamma(\gamma',\xi) = 0$$

ein lineares System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für das Vektorfeld ξ längs $\gamma : [a,b] \to U$. Nach (8.2) hängen die Koeffizienten des Systems nur von der ersten Fundamentalform ab. Die Lösungen bilden einen 2-dimensionalen Vektorraum und werden als parallele Vektorfelder längs γ bezüglich g bezeichnet. Für parallele Vektorfelder ξ,η längs γ bezüglich g ist $g(\xi,\eta) = \text{const.}$ nach Lemma 9.1(3).

Es ist ein klassisches Problem, zwei Punkte auf einer Fläche durch eine kürzeste Kurve zu verbinden, zum Beispiel hatten wir in Satz 2.5 gezeigt, dass in $\mathbb{S}^2$ ein Großkreisbogen der Länge höchstens π die kürzeste Verbindung seiner Endpunkte realisiert. Die Eigenschaft, Kürzeste zu sein, ist von globaler Natur und nicht leicht zu überprüfen. Deshalb ist es wie bei den Minimalflächen nützlich, anstatt der Minimierungseigenschaft nur eine notwendige Bedingung zu fordern, nämlich dass die erste Variation verschwindet. Hieraus können wir eine Differentialgleichung herleiten.

Definition 9.1 *Eine Variation einer gegebenen Kurve $\gamma : I = [a,b] \to U$, $\gamma = \gamma(t)$, ist eine Abbildung $f : I \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \to U$ mit $f(\cdot,0) = \gamma$. Das Vektorfeld $\xi = \frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(\cdot,0) : I \to \mathbb{R}^2$ heißt Geschwindigkeitsfeld der Variation. Die Variation hat feste Randwerte, falls $f(a,\varepsilon) = f(a,0)$ und $f(b,\varepsilon) = f(b,0)$ für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ (und folglich $\xi(a) = \xi(b) = 0$).*

Satz 9.1 (Erste Variation der Bogenlänge) *Sei $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g, und sei $\gamma : I = [a,b] \to U$ eine reguläre C^2-Kurve. Ist $f \in C^2(I \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0), U)$ eine Variation von γ mit festen Randwerten, so gilt*

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(F\circ f(\cdot,\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_I g\Big(\xi, \frac{\nabla}{dt}\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\,dt \quad \text{wobei } \xi = \frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(\cdot,0).$$

Beweis: Wir berechnen mit Lemma 9.2 und Lemma 9.3

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}\int_I g\Big(\partial_t f,\partial_t f\Big)^{\frac{1}{2}}\,dt\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_I g\Big(\partial_t f,\partial_t f\Big)^{-\frac{1}{2}} g\Big(\frac{\nabla}{\partial\varepsilon}\partial_t f,\partial_t f\Big)\,dt\Big|_{\varepsilon=0}\\
&= \int_i g\Big(\frac{\nabla}{\partial t}\partial_\varepsilon f,\frac{\partial_t f}{\|\partial_t f\|_g}\Big)\,dt\Big|_{\varepsilon=0}\\
&= \int_I g\Big(\frac{\nabla\xi}{dt},\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\,dt\\
&= \int_I \frac{d}{dt} g\Big(\xi,\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\,dt-\int_I g\Big(\xi,\frac{\nabla}{dt}\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\,dt\\
&= \underbrace{\Big[g\Big(\xi,\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\Big]_{t=a}^{t=b}}_{=0 \text{ wegen } \xi(a)=\xi(b)=0}-\int_I g\Big(\xi,\frac{\nabla}{dt}\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\,dt.
\end{aligned}$$

□

Die Bogenlänge von Kurven ist offensichtlich durch die erste Fundamentalform bestimmt, deshalb ist es nicht überraschend, dass die Variation der Bogenlänge nach (8.2) ebenfalls aus der ersten Fundamentalform berechnet werden kann.

Definition 9.2 (Geodätische) *Sei $F\in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g. Eine Kurve $\gamma\in C^2(I,U)$ heißt Geodätische bzgl. g, falls gilt:*

$$\frac{\nabla\gamma'}{dt}=0\quad\Leftrightarrow\quad\gamma''+\Gamma\circ\gamma(\gamma',\gamma')=0.$$

Folgerung 9.1 *Für eine reguläre Fläche $F\in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ mit erster Fundamentalform g und $\gamma\in C^2(I,U)$ sind äquivalent:*

(1) *γ ist nichtkonstante Geodätische bzgl. g.*

(2) *Es gibt ein $c>0$ mit $\|\gamma'\|_g\equiv c$, und für jede Variation mit festen Randwerten gilt*

$$\frac{d}{d\varepsilon}L\big(F\circ f(\cdot,\varepsilon)\big)|_{\varepsilon=0}=0.$$

Beweis: Für (1) ⇒ (2) berechnen wir mit Lemma 9.2

$$\frac{d}{dt}\|\gamma'\|_g^2=2g(\gamma',\frac{\nabla}{dt}\gamma')=0\quad\Rightarrow\quad\|\gamma'\|_g\equiv c>0.$$

Mit Satz 9.1 schließen wir

$$\frac{d}{d\varepsilon}L\big(F\circ f(\cdot,\varepsilon)\big)|_{\varepsilon=0}=-\frac{1}{c}\int_I g(\xi,\frac{\nabla\gamma'}{dt})\,dt=0.$$

Für (2) ⇒ (1) folgt, wieder aus Satz 9.1, für $f(t,\varepsilon)=\gamma(t)+\varepsilon\xi(t)$ mit $\xi\in C_c^\infty(I,\mathbb{R}^2)$,

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}L\big(F\circ f(\cdot,\varepsilon)\big)|_{\varepsilon=0}=-\frac{1}{c}\int_I g(\xi,\frac{\nabla\gamma'}{dt})\,dt=0.$$

Die Behauptung (1) folgt dann aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. □

Zur Konstruktion von Geodätischen liegen zwei verschiedene Ansätze nahe: zum einen kann man für gegebene $z_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$ das nichtlineare Anfangswertproblem

$$\gamma'' + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = 0, \quad \gamma(0) = z_0,\, \gamma'(0) = v$$

lösen. Nach Picard-Lindelöf existiert eine nicht erweiterbare Lösung $\gamma : (a,b) \to U$ mit $a < 0 < b$. Eine genaue Analyse liefert, dass im Fall $b < \infty$ die Kurve $\gamma(t)$ für $t \nearrow b$ jedes Kompaktum $K \subset U$ verlässt; analog für $t \searrow a$ falls $a > -\infty$. Für diese Aussage ist wichtig, dass der nichtlineare Term $\Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma')$ auf kompakten Teilmengen von U beschränkt bleibt wegen $\|\gamma'\|_g \equiv c$. Alternativ kann man zu gegebenen Punkten $z_0, z_1 \in U$ das Randwertproblem

$$\gamma'' + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = 0, \quad \gamma(a) = z_0,\, \gamma(b) = z_1$$

betrachten. Unter geeigneten Voraussetzungen an U kann dieses Problem gelöst werden, indem man eine Kürzeste von z_0 nach z_1 konstruiert. Mit Folgerung 9.1 schließt man, dass eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kürzeste der Klasse C^2 eine Geodätische ist.

Wir wollen jetzt die klassische Charakterisierung der Geodätischen auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ herleiten, die auf Johann Bernoulli zurückgeht.

Satz 9.2 *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g und Normale N, und $\gamma \in C^2(I, U)$. Mit $c = F \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *γ ist Geodätische bezüglich g.*

(2) $(c'')^\top = 0$.

(3) $c'' = h(\gamma', \gamma')N$.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 9.1, indem wir dort $\xi = \gamma'$ setzen:

$$c'' = (F \circ \gamma)'' = DF \cdot \frac{\nabla \gamma'}{dt} + h(\gamma', \gamma')N.$$

□

Beispiel 9.1 Betrachte für eine C^2-Kurve $c(t) = (r(t), h(t))$, $t \in J$, die Rotationsfläche

$$F : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t)),$$

wobei c regulär und $r(t) > 0$. Sei $S_\alpha \in \mathbb{SO}(3)$ die Drehung um die z-Achse mit Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$, und $\gamma : [a,b] \to J \times \mathbb{R}$, $\gamma(s) = (t(s), \varphi(s))$, eine beliebige C^2-Kurve. Es gilt dann

$$S_\alpha \circ F \circ \gamma = F \circ f(\cdot, \alpha) \quad \text{mit } f(s, \alpha) = \gamma(s) + \alpha e_2.$$

Wir wenden nun die Formel für die erste Variation aus dem Beweis von Satz 9.1 an; dort wurde erst im letzten Schritt benutzt, dass die Variation feste Randwerte hatte. Wegen $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(s, 0) = e_2$ ergibt sich für eine nichtkonstante Geodätische γ

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} L(F \circ f(\cdot, \alpha))|_{\alpha=0} = \Big[g\Big(e_2, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\Big]_{s=a}^{s=b}.$$

Da die Grenzen a und b beliebig gewählt werden können, bedeutet das:

$$g\Big(e_2, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big) \text{ ist längs jeder Geodätischen } \gamma \text{ konstant.}$$

Anschaulich kann das in $\mathbb{R}^3$ wie folgt interpretiert werden:

> bezeichnet $\beta(s) \in [0,\pi]$ den Winkel, mit dem die Geodätische $c(s)$ den Breitenkreis in Höhe $z(s)$ mit Radius $\varrho(s)$ schneidet, so ist $\varrho(s)\cos\beta(s)$ konstant.

Damit können die Geodätischen gut qualitativ diskutiert werden, siehe zum Beispiel Band 3, pp. 315-319, in M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Boston 1975.

Wie bereits am Beispiel der Großkreise auf $\mathbb{S}^2$ festgestellt, sind Geodätische nicht notwendig kürzeste Verbindungen ihrer Endpunkte. Man kann aber zeigen, dass hinreichend kleine Abschnitte einer Geodätischen stets die Verbindungslänge minimieren. Das Argument ist ähnlich wie unser Beweis in Satz 2.5 für $\mathbb{S}^2$; bei Interesse siehe zum Beispiel Kapitel 5.3 in W. Klingenberg, Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1973. Jedenfalls kann man sagen, dass die Geodätischen auf einer Fläche dem entsprechen, was im $\mathbb{R}^2$ die Geraden sind. Es stellt sich dann die Frage nach einem Krümmungsbegriff für Kurven auf einer Fläche, bei dem die Geodätischen genau die Kurven mit Krümmung Null sind.

Definition 9.3 (geodätische Krümmung) *Sei $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g. Ist $\gamma \in C^2(I,U)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, das heißt $\|\gamma'\|_g = 1$, und ist $\nu_g \in C^1(I,\mathbb{R}^2)$ Einheitsnormale längs γ bezüglich g, so heißt*

$$\varkappa_g = g\Big(\frac{\nabla\gamma'}{ds}, \nu_g\Big)$$

geodätische Krümmung von γ bezüglich ν_g.

Aus der gegebenen Definition und Formel (8.2) für die Christoffelsymbole folgt, dass $\varkappa_g$ eine Größe der inneren Geometrie ist, also aus der ersten Fundamentalform berechnet werden kann. Für die Invarianz bei Umparametrisierungen der Fläche gehen wir in den $\mathbb{R}^3$: ist $c = F\circ\gamma$, so bilden die Vektoren $c' = DF\cdot\gamma'$, $\eta = DF\cdot\nu_g$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums längs c, und es ergibt sich die klassische Formel

$$\varkappa_g = \langle c'', \eta\rangle.$$

Sei nun $\tilde{F} = F\circ\phi$ eine Umparametrisierung mit einem C^2-Diffeomorphismus $\phi : \tilde{U} \to U$, und $\psi = \phi^{-1}$. Nach Satz 5.1 hat $\tilde{F}$ die erste Fundamentalform

$$\tilde{g}(v,w) = g(D\phi\cdot v, D\phi\cdot w).$$

Die Kurve $\tilde{\gamma} = \psi\circ\gamma$ ist dann bezüglich $\tilde{g}$ nach der Bogenlänge parametrisiert:

$$\tilde{g}(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}') = g(D\phi\, D\psi\cdot\gamma', D\phi\, D\psi\cdot\gamma') = g(\gamma',\gamma') = 1.$$

Weiter ist das Vektorfeld $\tilde{\nu}_g = D\psi\cdot\nu_g$ Einheitsnormale längs $\tilde{\gamma}$ bezüglich $\tilde{g}$:

$$\tilde{g}(D\psi\cdot\nu_g, \tilde{\gamma}') = g(D\phi\, D\psi\cdot\nu_g, D\phi\, D\psi\cdot\gamma') = g(\nu_g,\gamma') = 0,$$

sowie

$$\tilde{g}(D\psi \cdot \nu_g, D\psi \cdot \nu_g) = g(D\phi\, D\psi \cdot \nu_g, D\phi\, D\psi \cdot \nu_g) = g(\nu_g, \nu_g) = 1.$$

Wegen $\tilde{c} = \tilde{F} \circ \tilde{\gamma} = F \circ \gamma = c$ und $\tilde{\eta} = D\tilde{F} \cdot \tilde{\nu}_g = DF \cdot \nu_g = \eta$ gilt aber trivialerweise $\langle \tilde{c}'', \tilde{\eta} \rangle = \langle c'', \eta \rangle$, womit die Invarianz von $\varkappa_g$ unter Umparametrisierungen von F gezeigt ist.

Beispiel 9.2 Sei $c(s) = (r(s), h(s))$, $s \in J$, nach der Bogenlänge parametrisiert mit $r(s) > 0$. Betrachte die Rotationsfläche

$$F : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(s, \varphi) = (r(s) \cos \varphi, r(s) \sin \varphi, h(s)),$$

mit zugehöriger erster Fundamentalform

$$(g_{ij}(s, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r(s)^2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Christoffelsymbole lauten

$$\begin{array}{cccccc} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \\ 0 & 0 & -rr' & 0 & r'/r & 0 \end{array}$$

Wir wollen jetzt für $s \in J$ fest die geodätische Krümmung des Breitenkreises

$$\gamma : \mathbb{R} \to J \times \mathbb{R},\ \gamma(t) = \Big(s, \frac{t}{r(s)}\Big)$$

ausrechnen. Nach Wahl ist $\gamma'(t) = \frac{1}{r(s)} e_2$ und folglich $\|\gamma'\|_g \equiv 1$. Weiter gilt

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = \gamma'' + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = \frac{1}{r(s)^2}(-r(s) r'(s) e_1) = -\frac{r'(s)}{r(s)} e_1.$$

Wir wählen die Einheitsnormale $\nu_g(t) = -e_1$ längs γ und erhalten

$$\varkappa_g = g\Big(\frac{\nabla \gamma'}{dt}, \nu_g\Big) = \frac{r'(s)}{r(s)}.$$

Zum Beispiel gilt für die Polarkoordinatendarstellung der Sphäre $r(s) = \sin s$, also $\varkappa_g = \cot s$ bezüglich der nach oben weisenden Normalen.

Beispiel 9.3 Sei $\gamma \in C^2(I, U)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt

$$\varkappa_g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \text{ ist Geodätische.}$$

Dies folgt sofort aus der Definition von $\varkappa_g$ in Verbindung mit

$$g\Big(\frac{\nabla \gamma'}{ds}, \gamma'\Big) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g(\gamma', \gamma') = 0.$$

Schließlich prüfen wir noch die Invarianz der geodätischen Krümmung bei Umparametrisierungen von γ. Da wir uns auf Parametrisierungen nach der Bogenlänge beschränken, haben wir nur Kurven $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\pm s + s_0)$ mit $s_0 \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Es gilt $\tilde{\gamma}'(s) = \pm\gamma'(\pm s + s_0)$ und $\tilde{\gamma}''(s) = \gamma''(\pm s + s_0)$, somit

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla\tilde{\gamma}'}{ds}(s) &= \tilde{\gamma}''(s) + \Gamma\big(\tilde{\gamma}(s)\big)\big(\tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}'(s)\big) \\
&= \gamma''(\pm s + s_0) + \Gamma(\gamma(\pm s + s_0))(\pm\gamma'(\pm s + s_0), \pm\gamma'(\pm s + s_0)) \\
&= \frac{\nabla\gamma'}{ds}(\pm s + s_0).
\end{aligned}$$

Es folgt $\tilde{\varkappa}_g(s) = \varkappa_g(\pm s + s_0)$ bezüglich $\tilde{\nu}_g(s) = \nu_g(\pm s + s_0)$.

Eine erste, lokale Fassung des Satzes von Gauß-Bonnet ist wie folgt.

Proposition 9.1 (Gauß-Bonnet für konforme Flächen) *Sei $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ konform parametrisierte Fläche, das heißt die erste Fundamentalform hat die Gestalt $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ mit $u \in C^2(U)$. Dann gilt für jedes Gebiet $G \subset\subset U$ mit zusammenhängendem, stückweise C^2-Rand die Formel*

$$\int_G K\, dA_g + \int_{\partial G} \varkappa_g\, ds_g + \sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\pi.$$

Dabei ist $\varkappa_g$ die geodätische Krümmung von ∂G bezüglich der inneren Normalen und die $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$ sind die Außenwinkel in den Ecken von ∂G.

Die Terme in der Formel sind für jede C^2-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ definiert, auch wenn sie nicht konform parametrisiert ist; außerdem sind sie invariant unter Umparametrisierungen $\tilde{F} = F \circ \phi$. Im einzelnen: die Gaußsche Krümmung K ist nach Definition das Produkt der beiden Hauptkrümmungen; die Regel $\tilde{K} = K \circ \phi$ wurde im Anschluss an Definition 6.3 gezeigt. Das Integral bezüglich des Flächenelements $dA_g = \sqrt{\det G}\, dxdy$ wurde in (7.1) definiert, dort wurde auch die Invarianz bei Umparametrisierungen von F festgestellt. Zur Berechnung des Randintegrals wählen wir eine Parametrisierung $\gamma : [0, L] \to \partial G$ nach der Bogenlänge und setzen

$$\int_{\partial G} \varkappa_g\, ds_g := \int_0^L \varkappa_g(\sigma)\, d\sigma.$$

Dabei ist rechts $\varkappa_g$ durch Definition 9.3 erklärt, und das Integral ist unabhängig von der Wahl der Bogenlängenparametrisierung von ∂G. Die Invarianz des Integrals unter Umparametrisierungen der Fläche folgt direkt aus der oben diskutierten Invarianz von $\varkappa_g$.

Beweis: (*von Proposition 9.1 im Fall $\partial G \in C^2$*) Wir berechnen mit (8.2)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^2 g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = (\partial_i u)\delta_{jk} + (\partial_j u)\delta_{ik} - (\partial_k u)\delta_{ij}.$$

Daraus ergibt sich folgende Liste:

Γ_{11}^1	$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$	Γ_{22}^1	Γ_{11}^2	$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$	Γ_{22}^2
$\partial_1 u$	$\partial_2 u$	$-\partial_1 u$	$-\partial_2 u$	$\partial_1 u$	$\partial_2 u$

Die Formel aus dem Theorem egregium, Folgerung (8.2), ergibt

$$\begin{aligned}
K &= e^{-2u}\Big(\partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2\Big)\\
&= e^{-2u}\Big(\partial_1(-\partial_1 u) - \partial_2(\partial_2 u) + (\partial_1 u)(-\partial_1 u) - (\partial_2 u)(\partial_2 u) + (\partial_2 u)(\partial_2 u) - (-\partial_1 u)(\partial_1 u)\Big)\\
&= -e^{-2u}\Delta u, \qquad \text{beziehungsweise}
\end{aligned}$$

$$K\,dA_g = -\Delta u\,dxdy. \tag{9.1}$$

Bezeichnet ds das Euklidische Längenelement längs einer Kurve $\gamma = \gamma(\sigma)$, so gilt

$$ds_g = \|\gamma'\|_g\,d\sigma = e^{u\circ\gamma}|\gamma'|\,d\sigma = e^{u\circ\gamma}ds.$$

Weiter ist $\Gamma(e_i,e_j) = (\partial_i u)e_j + (\partial_j u)e_i - \delta_{ij}Du$, und somit längs γ

$$\Gamma(\gamma',\gamma') = 2\langle Du,\gamma'\rangle\gamma' - |\gamma'|^2 Du = |\gamma'|^2\Big(2\big\langle Du,\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\big\rangle\frac{\gamma'}{|\gamma'|} - Du\Big).$$

Ist ν die Euklidische innere Normale an ∂G, so gilt

$$\nu_g = e^{-u}\nu \qquad \text{auf } \partial G.$$

Sei nun $\gamma : [0,L] \to \partial G$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge bezüglich g, so dass γ', ν positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\varkappa_g &= g(\gamma'' + \Gamma(\gamma',\gamma'),\nu_g)\\
&= e^{u\circ\gamma}\left\langle\Big(|\gamma'|\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\Big)' + \Gamma(\gamma',\gamma'),\nu\right\rangle\\
&= e^{u\circ\gamma}|\gamma'|^2\left\langle\frac{1}{|\gamma'|}\Big(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\Big)' - Du,\nu\right\rangle\\
&= e^{-u\circ\gamma}(\varkappa - \langle Du,\nu\rangle), \qquad \text{also}
\end{aligned}$$

$$\varkappa_g\,ds_g = (\varkappa - \langle Du,\nu\rangle)\,ds. \tag{9.2}$$

Dabei ist $\varkappa$ die übliche Krümmung der ebenen Kurve γ in $\mathbb{R}^2$, siehe Definition 3.1. Nach dem Umlaufsatz von Hopf, Satz 3.4, ist der Rotationsindex von γ gleich ± 1; tatsächlich zeigt der dortige Beweis $\mathrm{ind}(\gamma) = +1$ bei der gewählten Normierung. Aus (9.1) und (9.2) schließen wir nun mit dem Integralsatz von Gauß in der Ebene

$$\int_G K\,dA_g + \int_{\partial G}\varkappa_g\,ds_g = -\int_G \Delta u\,dxdy - \int_{\partial G}\langle Du,\nu\rangle\,ds + \int_{\partial G}\varkappa\,ds = 2\pi.$$

□

Bis hierher ging der Inhalt der im Sommersemester 2006 gehaltenen Vorlesung. Ich werde folgende Punkte bei Gelegenheit im Skript ergänzen:

- Isoperimetrische Ungleichung für Kurven und Flächen (in Kapitel 4)
- Behandlung der Ecken und Außenwinkel in Proposition 9.1
- Globale Fassung von Gauß-Bonnet
- Einfache Anwendungen von Gauß-Bonnet
- Anhang, im dem das Problem der Existenz konformer Parametrisierungen auf eine Standardaussage in der Theorie elliptischer Differentialgleichungen reduziert wird.