

**Aufgabe 1** *Partition der Eins für  $\mathbb{R}$ .*

1. Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & x \in (0, \infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

Weisen Sie nach, dass  $g$  eine  $C^\infty$  Funktion ist.

2. Mit Hilfe von 1.1, konstruieren Sie eine  $C^\infty$  Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

3. Mit Hilfe von 1.2, konstruieren Sie  $C^\infty$  Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , mit

$$f_i(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, i-2) \\ 1, & x \in (i-1, i) \\ 0, & x \in (i+1, \infty) \end{cases}$$

und

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_{2i} \equiv 1.$$

4. Fertigen Sie eine Skizze (Graph) von den  $f_i$ .

**Aufgabe 2** *Stetigkeit in metrischen Räumen*

Seien  $X, Y$  metrische Räume mit der (jeweils) von der Metrik induzierten Topologie, und sei  $f : X \rightarrow Y$ . Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für all offenen  $V \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(V)$  offen.
2. Für alle konvergenten Folgen  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $X$  gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i)$ .

**Aufgabe 3** *Das Kreuz*

Zeigen Sie:  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ , mit der induzierten Topologie, ist keine  $C^0$ -Mannigfaltigkeit.

**Aufgabe 4** *Homeomorph zu  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

Sei  $N = S^{n-1} \times \mathbb{R}$  mit der von  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Topologie: wir schreiben  $S^{n-1}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , und damit liegt  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sei  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit der von  $\mathbb{R}^n$  induzierten Topologie. Konstruieren Sie einen Homeomorphismus  $h : M \rightarrow N$ .

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 21.10.2003 bis 9:15.*