Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie I — WS 03/04, Serie 10

Prof. Dr. E. Kuwert, Dr. M. Simon — 21. Dezember 2003

Aufgabe 1 (*Definition der äußeren Ableitung*)
Für $\omega \in \Omega^l(M)$ und Vektorfelder $X_0, X_1, \ldots, X_l \in C^\infty(TM)$ sei

$$\begin{aligned} T(X_0, \ldots, X_l) &= \sum_{j=0}^{l} (-1)^j \, X_j(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_l) \\ &+ \sum_{0 \le j < k \le l} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_0, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, X_l), \end{aligned}$$

wobei $\widehat{\ldots}$ bedeutet, dass der Eintrag wegzulassen ist.

(i) Zeigen Sie, dass T in $X_0, \ldots, X_l$ linear über $C^\infty(M)$ und alternierend ist.

(ii) Folgern Sie durch Nachrechnen bzgl. der Basisfelder einer Karte, dass gilt: $T(X_0, \ldots, X_l) = d\omega(X_0, \ldots, X_l)$.

Aufgabe 2 (*Lemma von Cartan*)
Seien $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^1(M)$ 1-Formen, die in jedem Punkt $p \in M$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie: sind $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \Omega^1(M)$ 1-Formen mit

$$\sum_{i=1}^{k} \phi_i \wedge \omega_i = 0,$$

so gibt es Funktionen $a_{ij} \in C^\infty(M)$, $1 \le i, j \le k$, mit $a_{ij} = a_{ji}$ und $\phi_j = \sum_{i=1}^k a_{ij}\omega_i$.

Aufgabe 3 (*Riemannsche Flächen*)
Sei Σ eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, das heißt Σ besitzt einen zweidimensionalen, reellen Atlas mit Karten

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \ \varphi(p) = x + iy = z,$$

so dass alle Kartenwechsel holomorph sind. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Abbildung $J : TU \to TU$, $J(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}) = -b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}$ hängt nicht von der Wahl der Karte ab, das heißt J ist ein glatter $(1,1)$-Tensor auf Σ mit $J^2 = -\mathrm{Id}$.

(b) Sei $\Omega^1_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ der Raum der $\mathbb{C}$-wertigen 1-Formen. Dann gilt die Zerlegung $\Omega^1_{\mathbb{C}}(\Sigma) = \Omega^{1,0}_C(\Sigma) \oplus \Omega^{0,1}_C(\Sigma)$, wobei $\Omega^{1,0}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ (bzw. $\Omega^{0,1}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$) der Raum der 1-Formen ω mit $\omega(JX) = i\omega(X)$ (bzw. $\omega(JX) = -i\omega(X)$) ist.

(c) Eine Form $\omega \in \Omega^{1,0}_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ hat bzgl. einer Karte $\varphi : U \to \mathbb{C}$ eine Darstellung der Form $\omega = f\,dz$, wobei $f : U \to \mathbb{C}$ und $dz = dx + idy$, und ed gilt:

$$\omega \text{ geschlossen auf } U \Leftrightarrow f \text{ holomorph.}$$

Bemrkung. Eine $\mathbb{C}$-wertige 1-Form ist vom Typ $\omega = \alpha + i\beta$ mit α, $\beta \in \Omega^1(\Sigma)$. Ihre äußere Ableitung ist gegeben durch $d\omega = d\alpha + id\beta$.

Aufgabe 4 (*Symplektische Vektorräume*)
Sei V ein $2n$-dim. Vektorraum, und $\omega \in \Lambda^2(V)$ eine nicht ausgeartete 2-Form, das heißt für alle $v \neq 0 \in V$ existiert ein $u \in V$ so dass $\omega(u, v) \neq 0$.

- Für einen Untervektorraum $W \subset V$ sei
$$W^{\perp\omega} := \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \forall\, w \in W\}.$$
Zeigen Sie: $(W^{\perp\omega})^{\perp\omega} = W$, und $\dim W^{\perp\omega}) = 2n - \dim(W)$.

- W heisst *isotrop* falls $\omega|_{W\times W} = 0$. Zeigen Sie: W ist genau dann isotrop, wenn $W \subset W^{\perp\omega}$. Ist W isotrop, so ist $\dim(W) \leq n$.

- W heisst *Lagrangesch*, falls $W = W^{\perp\omega}$. Zeigen Sie: $\dim W = n$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 23.12.2003 bis 9:15.