Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie I — WS 03/04, Serie 11
Prof. Dr. E. Kuwert, Dr. M. Simon — 2. Januar 2004

Aufgabe 1 (*Linsenräumen wieder*)
Sind die Linsenräume $L(p,q)$ (Aufgabe 2, Serie 4) orientierbar?

Aufgabe 2 (*Orientierung komplexer Mannigfaltigkeiten*)
Fassen Sie $A \in GL_n(\mathbb{C})$ als reelle $2n \times 2n$-Matrix auf, indem Sie $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ über $z = x + iy \mapsto (x,y)$ identifizieren. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det_{\mathbb{R}^{2n}}(A) > 0.$$

Dies bedeutet, dass die einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit zugrundeliegende $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit orientierbar ist.

Aufgabe 3 (*Integral und Teilung der Eins*)
Sei $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Teilung der Eins auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie

$$\int_M \omega = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_M \eta_i \omega$$

für jede integrierbare n-Form ω.

Aufgabe 4 (*Zum Satz von Stokes*)
Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$. Bestätigen Sie durch Berechnung der Integrale, dass mit $\omega = x\,dy$ gilt: $\int_M d\omega \neq \int_{\partial M} \omega$. Wieso widerspricht das nicht dem Satz von Stokes?

Aufgabe 5 (*Tangentielle Vektorfelder auf S^2*)
Beweisen Sie den sogenannten Igelsatz: *jedes (glatte) tangentielle Vektorfeld auf S^2 hat eine Nullstelle*. Denn andernfalls existiert ein (glattes) Vektorfeld $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\langle X(x), x\rangle = 0$ und $|X(x)| = 1$ für alle $x \in S^2$. Zeigen Sie nun:

(i) Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist die Abbildung

$$f_\varepsilon : S^2 = S^2(1) \to S^2(r),\ f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon X(x) \quad (\text{wobei } r = r(\varepsilon))$$

ein Diffeomorphismus.

(ii) Für $\omega = x \lfloor (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$ gilt $\int_{S^2(r)} \omega = 4\pi\, r^3$.

(iii) $\int_{S^2} f_\varepsilon^*(\omega)$ ist ein Polynom höchstens 4-ten Grades in $\varepsilon > 0$.

Aus (i)-(iii) ergibt sich der gewünschte Widerspruch. Derselbe Beweis zeigt, dass es auf S^n für *n gerade* keine nullstellenfreien Vektorfelder gibt. Dagegen lassen sich auf den Sphären ungerader Dimension relativ leicht solche Felder angeben, vom Typ $X(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ geeignet.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 13.01.2003 bis 9:15.
Eine Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch wünschen wir Ihnen