Aufgabe 1 (*Eindimensionale Mannigfaltigkeiten*)
Sei (M,g) eine zusammenhängende, eindimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Zu $p \in M$ gibt es eine nicht erweiterbare Kurve $c \in C^1((a,b),M)$ mit $\|c'\|_g \equiv 1$ und $c(0) = p$. Diese Kurve ist surjektiv.

(b) Entweder c ist injektiv und damit Isometrie, oder c ist periodisch und liefert eine Isometrie von $(\mathbb{R}/(L\mathbb{Z}), dx^2)$ mit M für geeignetes $L > 0$.

Bemerkung. Jede zusammenhängende, eindimensionale Mannigfaltigkeit ist also diffeomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu $\mathbb{S}^1$.

Aufgabe 2 (*Minkowski-Modell und Poincaré-Modell von $\mathbb{H}^n$*)
Sei $\langle\, ,\, \rangle_L$ die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$, d.h. $\langle x,y\rangle_L = -x^0y^0 + \sum_{i=1}^n x^iy^i$, und

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x,x\rangle_L = -1,\, x^0 > 0\}.$$

Für $X,Y \in T_p\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei $g(X,Y) = \langle X,Y\rangle_L$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{H}^n, g)$ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(b) Die Abbildung $I(x) = -e_0 - 2\langle x+e_0, x+e_0\rangle_L^{-1}\,(x+e_0)$ ist ein Diffeomorphismus von $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ auf $\mathbb{H}^n$, und es gilt

$$F^*g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

Aufgabe 3 (*Poincaré-Modell und oberes Halbraum-Modell von $\mathbb{H}^n$*)
Betrachten Sie die n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned}(M,g) &= (\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\sum_{i=1}^n (dx^i)^2),\\ (N,h) &= (\{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}, \frac{1}{(x^n)^2}\sum_{i=1}^n (dx^i)^2).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Inversion I an der Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : |x + e_n| = \sqrt{2}\}$, also $I(x) = -e_n + 2|x+e_n|^{-2}(x+e_n)$, eine Isometrie $I : (N,h) \to (M,g)$ liefert.

Aufgabe 4 (*Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf S^n*)
Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $u(x) = \langle a,x\rangle$ mit $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, Lösung der Gleichung $-\Delta_{\mathbb{S}^n} u = \lambda u$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

Mathematik bietet Perspektiven

Berufsinformationswochen für Mathematiker

Montag,	
19. 1. 2004	Günter Neugart, Gymnasiallehrer, tätig als Fachberater und in der Begabtenförderun
19 Uhr c.t.	**Mathematiker in der Schule und darüber hinaus**
SR 404	

Dienstag,	Reiner Dietz, Heubeck-Feri
20. 1. 2004	**Mathematiker in der betrieblichen Altersversorgung**
18 Uhr c.t.	Dr. Angela Stevens, Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences (ab 19.30
SR 404	**Mathematik in den Biowissenschaften**

Mittwoch,	
21. 1. 2004	Herr Dr. Bierbaum, Allianz Lebensversicherungs-AG
18 Uhr c.t.	**Mathematiker in der Versicherung**
SR 404	

Donnerstag,	Dr. Martin Peters, Springer Verlag
22. 1. 2004	**Mathematiker im Verlagswesen (Lehrbücher der Mathematik)**
18 Uhr c.t.	Eva Saar, T-Systems Nova (ab 19.30 Uhr)
SR 404	**Mathematiker in der Sicherheitsberatung**

Die Veranstaltungsreihe „Mathematik bietet Perspektiven“ informiert über Berufsfelder und -chancen für Mathematiker/innen. Sie richtet sich an alle Studierenden des Mathematischen Instituts. Gäste sind selbstverständlich willkommen. *Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 27.01.2004 bis 9:15.*