
Aufgabe 1 (*Riemannsche Metrik auf $SO(n)$*)
Betrachten Sie $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem Skalarprodukt(!) $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tAB)$. Zeigen Sie:

1. $O(n) = \{T \in \mathbb{R}^{n\times n} : {}^tTT = \mathrm{Id}\}$ ist kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie den Tangentialraum im Punkt T.

2. Für $T \in O(n)$ sind die Abbildungen $L_T(A) = TA$ sowie $R_T(A) = AT$ Isometrien von $\mathbb{R}^{n\times n}$, und insbesondere Isometrien von $O(n)$.

Aufgabe 2 (*Ähnlichkeitsklassifikation zweidimensionaler flacher Tori*)
Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, y \geq 0\}$. Laut Vorlesung ist jeder flache Torus ähnlich zu einem Torus $\mathbb{R}^2/\Gamma$ mit $\Gamma = \mathbb{Z}\cdot e_1 \oplus \mathbb{Z}\cdot v$, $v \in M$. Zeigen Sie:

1. Für $v_i \in M$ $(i = 1,2)$ sind die zugehörigen Tori $\mathbb{R}^2/\Gamma_i$ genau dann ähnlich, wenn $v_1 = v_2$.

2. Bestimmen Sie die Isometriegruppe für jeden Torus der obigen Form.

Aufgabe 3 (*Abstandsfunktion auf zweidimensionalen Kegeln*)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$ eine eingebettete C^1-Kurve der Länge $L \in (0,\infty)$. Wir interessieren uns für die Abstandsfunktion d auf dem Kegel $K = \{p \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\} : \frac{p}{|p|} \in \Gamma\}$. Sei $p \in K$ gegeben und $x = (|p|, 0) \in \mathbb{R}^2$. Setze $C = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^1 : |\theta| < \min(\pi, L/2)\}$, und wähle eine bogenlängentreue Parametrisierung $\gamma : C \to \Gamma$ mit $\gamma((1,0)) = \frac{p}{|p|}$. Betrachte die Abbildung

$$f : V = \{y \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\} : \frac{y}{|y|} \in C\} \to K,\; f(y) = |y|\,\gamma(\frac{y}{|y|}).$$

Es gilt also $p = f(x)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. f ist lokal isometrisch, das heißt $f^*\langle\, ,\,\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle\, ,\,\rangle_{\mathbb{R}^2}$.

2. $d(p,q) = |p-q|_{\mathbb{R}^3}$, falls $q = \lambda p$ mit $\lambda \geq 0$.

3. $d(p,q) = \begin{cases} |x-y|_{\mathbb{R}^2} & \text{falls } q = f(y) \text{ für ein } y \in V, \\ |p|_{\mathbb{R}^3} + |q|_{\mathbb{R}^3} & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 4 (*Warped-Product-Metriken*)
Seien (M_i, g_i), $i = 1,2$, Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Riemannsche Metrik g auf $M_1 \times M_2$ heißt Warped-Product-Metrik, wenn es eine Funktion $f \in C^\infty(M_1, (0,\infty))$ gibt mit $g(x,p) = g_1(x) + f^2(x)g_2(p)$ für alle $(x,p) \in M_1 \times M_2$. Zeigen Sie:

1. $d_g((x,p),(y,p)) = d_{g_1}(x,y)$.

2. Sei $f(x_0) = \inf_{x\in M} f(x)$. Dann ist $d_g((x_0,p),(x_0,q)) = f(x_0)d_{g_2}(p,q)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 03.02.2003 bis 9:15.