
Aufgabe 1 (*Reelle und komplexe Vektorbündel*)
Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel vom (reellen) Rang $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(1) Es gibt einen Schnitt $J \in C^\infty(\mathrm{End\,E})$ mit $J^2 = -\mathrm{Id_E}$.

(2) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m = 2k$, und die Strukturgruppe des Bündels ist nach $GL_k(\mathbb{C}) \subset Gl_m(\mathbb{R})$ reduzierbar.

Aufgabe 2 (*Orientierbarkeit von Vektorbündeln*)
Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Überlegen Sie, was eine *vernünftige* Definition für die Eigenschaft *"E ist orientierbar"* wäre. Es sollte gelten: M orientierbar $\Leftrightarrow$ TM orientierbar.

Aufgabe 3 (*Parallelverschiebung auf dem Kegel*)
Sei $K \subset \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ der in Aufgabe 3, Serie 14, betrachtete Kegel, mit der lokalen Parametrisierung $f : V \to K$. Sei ∇ die von $\mathbb{R}^3$ induzierte, kovariante Ableitung auf TK, also $\nabla_X Y = (D_X Y)^\top$. Zeigen Sie:

(a) Die Parallelverschiebung ist lokal wegunabhängig, genauer: sind $\gamma_{1,2}$ Wege von p nach q in $f(V)$, so liefert Parallelverschiebung längs γ_i denselben Wert.

(b) Geben Sie ein Beispiel, dass die Parallelverschiebung nicht global wegunabhängig ist.

Aufgabe 4 (*Whitney-Summe*)
Seien $\pi_i : E_i \to M$ zwei Vektorbündel vom Rang $k_i \in \mathbb{N}$. Als Menge ist die Whitneysumme von E_1 und E_2 wie folgt definiert:

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)\}.$$

Die Bündelprojektion ist $\pi(v_1, v_2) := \pi_1(v_1)\ (= \pi_2(v_2))$. Zeigen Sie:

(1) Die Whitney-Summe ist ein lokal triviales Vektorbündel vom Rang $k_1 + k_2$.

(2) Seien M_i, $i = 1, 2$, Mannigfaltigkeiten und $p_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ die Projektionen auf die Faktoren. Dann ist $T(M_1 \times M_2)$ isomorph zu $p_1^*(TM) \oplus p_2^*(TN)$.

(3) $M \times N$ ist genau dann orientierbar, wenn M und N orientierbar sind.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 10.02.2004 bis 9:15. Dieses Blatt ist freiwillig. Wer es macht, bekommt für richtige Lösungen Bonus-Punkte.