
Aufgabe 1 *Komplexer projektiver Raum.*
Auf $X = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ werde die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert durch

$$z \sim w \iff w = \lambda z \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Sei $[z] := \{w \in X : w \sim z\}$ die Äquivalenzklasse von z, $\mathbb{C}P^n := \{[z] : z \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to \mathbb{C}P^n$, $z \to [z]$ die kanonische Projektion. Durch die Quotienttopologie wird $\mathbb{C}P^n$ zu einem topologischen Raum.
Konstruieren Sie einen $2n$-dimensionalen C^∞ Atlas auf $\mathbb{C}P^n$. Insbesondere, berechnen Sie (explizit) die Kartenwechseln, und zeigen Sie dass sie C^∞ Funktionen sind (Hinweis: siehe $\mathbb{R}P^n$ in der Vorlesung).

Aufgabe 2 *Stetigkeit und die Quotienttopologie*
Seien X, Y topologische Räume, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $[z] := \{w \in X : w \sim z\}$ die Äquivalenzklasse von z, $X/\sim := \{[z] : z \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$, $z \to [z]$ die kanonische Projektion, und sei $X/\sim$ mit der Quotienttopologie versehen. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung mit $f(x) = f(y)$ für alle x, y mit $x \sim y$ (also, f ist konstant auf jede Fasser). Zeigen Sie:

1. $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ durch $\tilde{f}([x]) = f(x)$ ist wohl definiert.
2. f ist stetig $\iff$ $\tilde{f}$ ist stetig .

Aufgabe 3 *Punktkompaktifizierung*
Sei X eine Menge mit einer Topologie $\mathcal{O}$. Definition: X ist *lokal kompakt*, falls für jeden Punkt $x \in X$ es ein $U \in \mathcal{O}$ und ein $K \subseteq X$ existieren, so dass $U \subseteq K$, K kompakt, und $x \in U$.
Sei X lokal kompakt und Hausdorffsch. Die Punktkompaktifierung von X ist $\tilde{X} = X \cup \{q\}$ ($q \notin X$ ist ein beliebiger Punkt) mit der Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$, wobei $\tilde{\mathcal{O}}$ ist durch

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \{(X - K) \cup \{q\} : K \subseteq X, K \text{ kompakt } \}$$

gegeben. Zeigen Sie:

1. $\tilde{\mathcal{O}}$ ist eine Topologie auf $\tilde{X}$.
2. $\tilde{X}$ ist Hausdorffsch.
3. $\tilde{X}$ ist kompakt.

   (Zur Erinerung: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist Kompakt genau dann, wenn jede offene überdeckung von A eine endliche Überdeckung beinhält. Eine offene überdeckung von A ist eine Teilmenge $\mathcal{O}'$ von $\mathcal{O}$ so dass $A \subseteq \cup_{U \in \mathcal{O}'} U$.

Aufgabe 4 *Hausdorffsch oder nicht?*

Sei $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$, p ein beliebiger Punkt nicht in $\mathbb{R}$. Sei $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$. Sei

$$\mathcal{O} = \{U \cup V : U \in \mathcal{O}_\mathbb{R}, V = \emptyset, \text{ oder } V = \{p\} \cup (W \setminus \{0\}), \text{ wobei } W \in \mathcal{O}_\mathbb{R}, \text{ mit } 0 \in W\}.$$

1. Zeigen Sie dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$ ist.
2. Konstruieren Sie einen C^0-Atlas für $(M, \mathcal{O})$.
3. Ist M Haussdorfsch?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 28.10.2003 bis 9:15.