Aufgabe 1 *Zusammenhängend*
Zeigen Sie dass die folgende Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist:

$$M = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Aufgabe 2 *Polarkoordinaten*

1. Sei M die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3$ mit der standard Topologie/Differenzierbare-Struktur. Bestimmen Sie einen maximalen Definitionsbereich $U \subset M$, das Bild V und eine Abbildungsvorschrift für eine Karte ϕ der Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^3$, deren Umkehrabbildung durch den Ausdruck

$$\phi^{-1}(r, \alpha, \theta) = (r \cos\theta \cos\alpha, r \cos\theta \sin\alpha, r \sin\theta)$$

gegeben ist (Polarkoordinaten).

2. Sei $\phi : U \to V$ wie oben in teil 1. Für die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ($M = \mathbb{R}^3$) gelte auf U die Darstellung $f \circ \phi^{-1}(r, \alpha, \theta) = g(r)$, mit einer Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Formulieren Sie Bedingungen (*) an g so dass: $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ genau dann wenn g die Bedingungen (*) erfüllt .

Aufgabe 3 *Riemannsche Zahlenkugel*
Ersetzt man in der Definition eines C^∞-Atlanten den Bildbereich $\mathbb{R}^m$ durch $\mathbb{C}^n$ und fordert, dass die Kartenwechsel holomorphe Abbildungen sind, so erhält man den Begriff eines *n-dimensionalen komplexen Atlanten* und damit auch einer *n-dimensionalen komplexen Struktur* und einer *n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit.*
Eine Abbildung zwischen zwei komplexen Mannigfaltigkeiten heißt dann *holomorph*, falls sie stetig ist und ihre Kartendarstellungen holomorph sind.
Durch die übliche Identifikation von $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ wird jede n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit zu einer $2n$-dimensionalen reellen C^∞-Mannigfaltigkeit und jede holomorphe Abbildung zu einer glatten. Sei ϕ^N und ϕ^S die Stereographische Projektionen von Nord- und Südpol (siehe Vorlesung).

1. Zeigen Sie:

   Die Karten ϕ^N und $\overline{\phi^S}$, (der Querstrich bezeichne die komplexe Konjugation) definieren eine 1-dimensionale komplexe Struktur auf S^2.

2. (Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung: vgl. Aufgabe 3, Serie 2)

$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ werde mit dem Atlas $\{\phi_1, \phi_2\}$ versehen, wobei $\phi_1 := Id_{\mathbb{C}}$ ist und $\phi_2 \colon \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$\phi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{falls} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{falls} \quad z = \infty \end{cases}$$

Zeigen Sie: Dieser Atlas macht $\widehat{\mathbb{C}}$ zu einer 1-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit (zur Topologie siehe Aufgabe 3, Serie 2).

Bemerkung: ∞ ist als Punkt der nicht zur $\mathbb{C}$ gehört zu verstehen. Wir hätten genausogut p anstatt ∞ schreiben können, wobei $p \notin \mathbb{C}$.

3. Zeigen Sie: Die Abbildung $f \colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \phi^N(x) & \text{falls} \quad x \neq (0,0,1) \\ \infty & \text{falls} \quad x = (0,0,1), \end{cases}$$

ist biholomorph (d. h. ist bijektiv und sowohl f als auch die Umkehrabbildung sind holomorph) und als Abbildung zwischen reellen Mannigfaltigkeiten ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 4 C^∞

1. Zeigen Sie: Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $V \subset M$ eine offene Umgebung von p, und ist $g \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, so existiert eine offene Menge U mit $p \in U \subset V$ und eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die auf U mit g übereinstimmt.

2. Ist $\mathfrak{A}$ ein m-dimensionaler C^∞-Atlas auf dem topologischen Hausdorff-Raum M, so sei

$$C^\infty_{\mathfrak{A}}(M) := \{f \colon M \to \mathbb{R} \mid f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(V, \mathbb{R}) \text{ für alle } \phi : U \to V, \phi \in \mathfrak{A}\}.$$

Zeigen Sie: Sind $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ zwei solche Atlanten, so erzeugen sie genau dann dieselbe C^∞-Struktur, wenn $C^\infty_{\mathfrak{A}_1}(M) = C^\infty_{\mathfrak{A}_2}(M)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 04.11.2003 bis 9:15.