Aufgabe 1 *Nirgends verschwindender Vektor auf* S^{2n+1}

Sei $M := S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Zu $p \in S^{2n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, setze $c_p(t) = \cos t + ip \cdot \sin t \in S^{2n+1}$. Zeigen Sie:

1. $X(p) = \dot{c}_p(0)$ ist ein nirgends verschwindender Vektor.
2. Das gerade definierte Vektorfeld X ist C^∞.
3. Sei $H : S^3 \to S^2$ die sog. Hopffaserung:
$$H(z,w) = \begin{cases} \phi_N^{-1}(\frac{z}{w}), & w \neq 0, \\ (0,0,1), & w = 0 \end{cases}$$
Dann gilt: H ist eine C^∞ Abbildung, und $DH(p) : T_pS^3 \to T_{H(p)}S^2$, ist surjektiv (also H hat rang 2)
4. Für alle $x \in S^2$ gilt: $H^{-1}(\{x\})$ ist homeomorph zu S^1.
5. Sei H und X wie oben. Berechnen Sie $DH(p)(X(p))$.

Aufgabe 2 *Mannigfaltigkeit als Urbild einem Punkt*

Seien M^m, N^n, P^p, C^∞ Mannigfaltigkeiten der dim. m, n, p. Sei $f : M \to N$ eine C^∞ Abbildung. Ein Punkt $x \in M$ heisst *kritischer Punkt von* f falls $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ nicht surjektiv ist. Ein Punkt $y \in N$ heisst *kritischer Wert* falls es einen Punkt $x \in M$ existiert, mit $f(x) = y$, wobei x ein kritischer Punkt von f ist. Ein Punkt $y \in N$ heisst *regulärer Wert von* f falls es kein kritischer Wert ist. Ein Punkt $x \in M$ heisst *regulärer Punkt von* f falls es kein kritischer Punkt von f ist.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr (Beweis bzw. Gegebeispiel).

- Ist $x \in M$ regulärer Punkt von f, so ist $f(x)$ regulärer Wert von f.
- $f^{-1}(y)$ eine $(m-n)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit (von M), $\Rightarrow$ y ist ein regulärer Wert von f.
- y ein reg. Wert von $f \Rightarrow f^{-1}(y)$ ist eine $(m-n)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit (von M).
- x reg. Punkt von f, $f(x)$ regulärer Punkt von $g \Rightarrow x$ ist ein regulärer Punkt von $g \circ f$.

Aufgabe 3 *Vektoren und Rotationssymmetrische Flächen*

Sei

$$M^n = \{(x, r^2(x)\alpha) : x \in \mathbb{R}, \alpha \in S^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

wobei $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist C^∞. Zeigen Sie dass:

1. Seien $\phi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda \in \Lambda$, die Karten eines C^∞ Atlas für S^{n-1}, $\phi_\lambda(\alpha) = y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Zeigen Sie dass $\psi_\lambda : {\psi_\lambda}^{-1}(W^\lambda) \to W^\lambda$ einen C^∞ Atlas für M bilden, wobei

   ${\psi_\lambda}^{-1}(x, y) = (x, r^2(x){\phi_\lambda}^{-1}(y))$, und $W^\lambda = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in V_\lambda\}$.

2. Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ die Funktionen $f(p) = \sqrt{(p_2)^2 + \ldots + (p_{n+1})^2}$, $g(p) = |p_1|^2 + |p_2|$, für $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Bestimmen Sie die (offenen) Mengen $M_f \subset M$, und $M_g \subset M$ wo die Funktion f bzw. g lokal C^∞ sind. (Bemerkung: f ist lokal C^∞ in $p \in M$ genau dann wenn, es existiert eine Offene Umgebung $U \subset M$, $p \in U$, so dass $f|_U \in C^\infty(U)$.)

3. Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ wie oben, und $\Lambda = \{1, 2\}$, mit $\phi_1 = \phi_N : S^{n-1}\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\phi_2 = \phi_S : S^{n-1}\backslash\{S\} \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\phi_k(\alpha) = y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $k \in \{1, 2\}$, die Sterographische Projektionen. Berechenen Sie $\frac{\partial}{\partial x}(f)$, $\frac{\partial}{\partial y^i}(f)$, und $\frac{\partial}{\partial x}(g)$, $\frac{\partial}{\partial y^i}(g)$ für $i \in \{1, 2, \ldots n-1\}$ in den Punkten wo die Funktionen lokal C^∞ sind.

Aufgabe 4 *Vektor felder auf* $\mathbb{R}P^n$

Konstruieren Sie ein C^∞ Vektorfeld auf $\mathbb{R}P^n$ so dass,

1. a) X keine Nullstelle hat, falls n ungerade ist.

2. b) X genau eine Nullstelle hat, falls n gerade ist.

Hinweis: Benutzen Sie als Hilfsmittel die Vektorfelder, die in Aufgabe 1 konstruiert worden sind.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 18.11.2003 bis 9:15.