Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie I — WS 03/04, Serie 6
Prof. Dr. E. Kuwert, Dr. M. Simon — 18. November 2003

Aufgabe 1 *(Koordinaten-Vektorfeld auf S^2)*
Auf S^2 sei $\varphi^N : U^N = S^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathbf{R}^2$, $\varphi^N(p) = x \in \mathbf{R}^2$, die stereographische Projektion vom Nordpol. Das Vektorfeld X auf S^2 sei gegeben durch

$$X(p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^1}(p) & p \in U^N \\ 0 & p = (0,0,1). \end{cases}$$

Zeigen Sie: X ist C^∞ auf ganz S^2. Geben Sie die Integralkurven von X an, und skizzieren Sie deren Verlauf.

Aufgabe 2 *(C^∞-Vektorfelder)*
Sei $X \in C^0(TM)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $X \in C^\infty(TM)$.
2. Für alle offenen $V \subset M$ und $f \in C^\infty(V)$ gilt $\partial_X f \in C^\infty(V)$.

Dabei ist natürlich $(\partial_X f)(p) = Df(p)X(p)$.

Aufgabe 3 *(Derivationen auf $C^\infty(M)$)*
Sei M eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Der Raum $Der(M)$ der Derivationen auf $C^\infty(M)$ ist die Menge aller linearen Abbildungen $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, für die die Produktregel gilt:

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + f(\Delta g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Beweisen Sie: zu jedem $\Delta \in Der(M)$ gibt es ein Vektorfeld $X \in C^\infty(TM)$ mit $\Delta(f) = \partial_X f$ für alle $f \in C^\infty(M)$.

Aufgabe 4 *(Konforme Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten)*
Seien $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$ C^∞-Untermannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. $f : M \to N$ heisst konform, wenn eine Funktion $\lambda \in C^\infty(M)$, $\lambda > 0$, existiert mit

$$\langle Df(p)X, Df(p)Y \rangle = \lambda^2(p)\langle X, Y \rangle \quad \forall p \in M,\ X, Y \in T_pM.$$

Zeigen Sie dass folgende Abbildungen konform sind:

1. Die stereographischen Projektionen $\phi_{N,S} : U_{N,S} \to \mathbb{R}^n$ (siehe Vorlesung),
2. Die Abbildung $\sigma_\lambda : S^n \to S^n$ aus Beispiel 2.1

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 25.11.2003 bis 9:15.