
Aufgabe 1 *Killing-Vektorfelder*
Seien $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, $i = \{1, \ldots, n\}$, die Basisfelder der Standardkarte $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Vektorfelder $X(p) = \sum_{i,j=1}^n a^i_j \cdot p^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, wobei $A = (a^i_j)_{i,j\in\{1,\ldots n\}}$ schiefsymmetrisch, sowie $Y(p) = \frac{\partial}{\partial x^1}(p)$ und $Z(p) = p^1 \frac{\partial}{\partial x^1}(p)$.

- Zeigen Sie, dass $X, Y, Z : M \to TM$ von der Klasse C^∞ sind.
- Bestimmen Sie für $p \in \mathbb{R}^n$ die Integralkurven $\phi_p, \psi_p, \alpha_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von X, Y, Z.
- Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\phi_t : M \to M$, $\phi_t(x) = \phi_x(t)$, Isometrien sind. (Bemerkung: ein Vektorfeld mit dieser Eigenschaft heißt *Killing-Vektorfeld*).
- Sind Y bzw. Z Killing-Vektorfelder? Ist Z ein Killing-Vektorfeld? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 2 *Lie-Ableitung*

Sei $A_X Y : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ durch

$$A_X Y(f) = \lim_{t\to 0} \frac{Y(p)(f) - (D\phi_t)(\phi_{-t}(p))(Y(\phi_{-t}(p)))(f)}{t},$$

definiert, wobei $\phi_t : U \to \phi_t(U)$ der lokale Fluss von X ist (Satz 1.5). Zeigen Sie:

- $A_X Y$ ist wohldefiniert.
- $A_X Y = L_X Y$. Damit ist $A_X Y$ ein C^∞ Vektorfeld. (Definition von $L_X Y$: siehe Vorlesung, Definition 4.8).

Aufgabe 3 *Lokaler Fluss*
Sei $c : (-\infty, \omega) \to M$ eine *maximale* Integralkurve des C^∞-Vektorfelds X auf der Mannigfaltigkeit M. Das heißt: c ist Lösung der Differentialgleichung

$$c'(t) = X(c(t)) \qquad \text{für alle } t \in (-\infty, \omega),$$

und c kann nicht zu einer Lösung der Gleichung auf einem größeren Intervall $(-\infty, \tilde{\omega})$, also $\tilde{\omega} > \omega$, fortgesetzt werden. Zeigen Sie: ist $\omega < \infty$, so gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset M$ ein $t_K < \omega$, so dass $c(t) \notin K$ für alle $t > t_K$.

Aufgabe 4 *Lokale Koordinaten durch dem Fluss*
Sei $M = \mathbb{R}^n$ mit der Karte $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und zugehörigen Basis-Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Sei $X : M \to TM$ ein C^∞ Vektorfeld mit $X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}(0)$. Zeigen Sie, dass es eine Karte $\psi : U \to V$, $\psi(p) = y$, mit $0 \in U$ gibt, so dass $X(p) = \frac{\partial}{\partial y^1}(p)$ für alle $p \in U$.

Betrachten Sie zur Konstruktion der Koordinaten den (lokalen) Fluss von X.
(Bemerkung: Dieses Argument funktioniert analog für ein beliebiges Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit, in der Umgebung eines Punkts p mit $X(p) \neq 0$).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 02.12.2003 bis 9:15.