

Aufgabe 1 *Lie-Klammer und Fluss*

Auf \mathbb{R}^2 seien die Vektorfelder X, Y gegeben durch $X(x, y) = (y, -\cos x)$ und $Y(x, y) = (y, \cos x)$. Überprüfen Sie, ob die zugehörigen Flüsse ϕ^X und ϕ^Y kommutieren (das heisst, überprüfen Sie ob $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$ für alle s, t).

Aufgabe 2 *Integral eines Flusses*

Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Integral des Flusses $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ eines Vektorfeldes $X \in C^\infty(TM)$, wenn für jede Flusslinie $c(t) = \phi_p(t)$ gilt: $f \circ c = \text{const.}$

(a) Zeigen Sie: Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt:

$$f \text{ Integral} \Leftrightarrow X(f) = 0.$$

(b) Sei $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ („Potential“). Die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$x''(t) = -\nabla V(x(t)) \quad (\nabla V(x) = (D_1V(x), \dots, D_mV(x)))$$

lässt sich äquivalent in ein System erster Ordnung auf \mathbb{R}^{2m} der Form

$$(x, y)' = X(x, y)$$

umformen, indem man die Funktion $y := x'$ einführt. Bestimmen Sie das Vektorfeld X und zeigen Sie: die „Energie“ $E(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$ ist Integral des Flusses von X .

Aufgabe 3 *Rationale Flusslinien auf dem Torus*

Betrachten Sie $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, wobei $(\mathbb{Z}^2, +)$ auf \mathbb{R}^2 operiert durch $(n, m) \cdot (x, y) = (x + n, y + m)$, mit der zugehörigen Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $X : M \rightarrow TM$ das durch $X(\pi(x, y)) = D\pi(x, y)\tilde{X}(x, y)$ gegebene Vektorfeld, wobei $\tilde{X}(x, y) = (1, a)$. Zeigen Sie:

1. Der Fluss von X durch $\pi(p)$ ist $\phi_t(\pi(p)) = \pi(p + t(1, a))$.
2. $a \in \mathbb{Q}$ genau dann, wenn die Flusslinien von ϕ periodisch sind.

Aufgabe 4 *Irrationale Flusslinien auf den Torus*

Sei M, π, X wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so sind die Flusslinien injektiv und dicht in M .

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 02.12.2003 bis 9:15.