

**Aufgabe 1** (*Dachprodukt von 1-Formen*)

Zeigen Sie für  $\omega^1, \dots, \omega^k \in \Lambda^1 V = V^*$  folgende Aussagen:

- (1)  $(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$ .
- (2)  $\omega^1, \dots, \omega^k$  sind genau dann linear unabhängig, wenn  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \neq 0$ .

**Aufgabe 2** (*Zerlegbare  $k$ -Formen*)

Eine Form  $\omega \in \Lambda^k V$  heißt zerlegbar (oder einfach), falls sie als Dachprodukt von 1-Formen darstellbar ist. Beweisen Sie:

- (1) Jede  $k$ -Form ist zerlegbar, falls  $\dim V \leq 3$ .
- (2)  $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$  ist nicht zerlegbar. Dabei sei  $e^1, \dots, e^4$  die duale Basis zur Standardbasis, also  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ .

**Aufgabe 3** (*Maxwell-Gleichungen*)

Betrachten Sie auf  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  die 1-Form  $A = A_0 dt + \sum_{i=1}^3 A_i dx^i$ . Definieren Sie  $E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch die Gleichung

$$dA = - \sum_{i=1}^3 E^i dt \wedge dx^i + \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} B^i dx^{\hat{i}}.$$

Folgern Sie aus  $d^2 A = 0$  folgende zwei (von insgesamt vier) Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0.$$

**Aufgabe 4** (*Lipschitz-Abhängigkeit des Flusses vom Anfangswert*)

Betrachte auf der offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Lösungen  $\gamma_i : [0, T] \rightarrow \Omega$  der beiden Anfangswertprobleme

$$\gamma_i'(t) = X_i(\gamma_i(t)), \quad \gamma_i(0) = p_i \in \Omega \quad (i = 1, 2),$$

Die  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien Lipschitzstetig mit Konstante  $L < \infty$ . Beweisen Sie:

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq e^{LT} (|p_1 - p_2| + T \|X_1 - X_2\|_{C^0(\Omega)}).$$

*Hinweis.* Verwenden Sie die Gronwallsche Ungleichung.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 16.12.2003 bis 9:15.*