Differentialgeometrie

Wintersemester 2003/2004

Prof. Dr. E. Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gegenstand der „klassischen“ Differentialgeometrie sind Flächen (oder Kurven) $M \subset \mathbb{R}^3$. Diese können lokal durch Parametrisierungen beschrieben werden.

B i l d

Ab dem 19. Jahrhundert wurden vermehrt Situationen betrachtet, in denen Flächen nicht eingebettet sind, also nicht in einem umgebenden Raum liegen. Beispiele:

(i) die hyperbolische Ebene (J. Bolyai/N. I. Lobatschewski um 1830)

B i l d

D. Hilbert hat 1901 gezeigt, dass es keine isometrische Einbettung $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$ gibt.

(ii) das *Theorema egregium* von C. F. Gauß (1827) besagt, dass die Gaußkrümmung K einer Fläche invariant unter Verbiegungen ist, das heißt sie hängt nur von den Längenverhältnissen auf der Fläche ab und nicht von der Lage der Fläche im Raum. In seinem Habilitationsvortrag (1854) zum Thema *Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen* hat B. Riemann dann das Konzept eines abstrakten Raums mit Längen- und Winkelmessung entworfen; heute sprechen wir von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Krümmung wird dabei durch den Riemannschen Krümmungstensor beschrieben.

(iii) Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie (um 1915) von A. Einstein ist der Begriff einer Raum-Zeit mit Längen- und Winkelmessung. Die Kopplung zwischen Materie und Geometrie der Raumzeit ist dabei durch die Einsteinschen Feldgleichungen gegeben.

(iv) Das Problem der mehrdeutigen Lösung von algebraischen Gleichungen, wie zum Beispiel $w^2 - z = 0$, führte zur Theorie der Riemannschen Flächen. Der Begriff der Mannigfaltigkeit wurde erstmals in diesem Zusammenhang in moderner Weise formuliert, und zwar von H. Weyl in seinem Buch *Die Idee der Riemannschen Fläche* von 1913. Im Beispiel gibt es für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ lokal zwei Lösungsfunktion, die aber nicht auf ganz $\mathbb{C}$ stetig definiert werden können. Auf einer geeigneten abstrakten Fläche kann aber $\sqrt{z}$ global definiert werden.

B i l d

1 Der Begriff der Mannigfaltigkeit

Definition 1.1 *Eine Topologie auf einer Menge X ist ein Mengensystem $\mathcal{O} \subset 2^X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,

(ii) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$, *falls* $U_\lambda \in \mathcal{O}$ *für alle* $\lambda \in \Lambda$ *(Λ beliebige Indexmenge),*

(iii) $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{O}$, *falls* $U_i \in \mathcal{O}$ *für* $i = 1, \ldots, N$ *mit* $N < \infty$.

Die Menge X mit dem System $\mathcal{O}$ heißt topologischer Raum. Die offenen Mengen in X sind genau die Mengen $U \in \mathcal{O}$. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \backslash A$ offen ist. Für $x \in X$ heißt jede offene Menge U mit $x \in U$ offene Umgebung von X. Allgemein ist eine Umgebung von $x \in X$ eine beliebige Menge, die eine offene Umgebung von x enthält.

In vielen Fällen ergibt sich die Topologie auf X aus dem Zusammenhang, und wird dann nicht extra erwähnt.

Definition 1.2 *Eine Topologie auf X heißt Hausdorffsch bzw. X heißt Hausdorffraum*, wenn je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen U bzw. V besitzen mit $U \cap V = \emptyset$.*

Beispiel 1.1 In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Topologie auf natürliche Weise gegeben. Und zwar heißt bekanntlich die Menge

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\} \quad (x \in X,\, r > 0)$$

offene Kugel um x mit Radius r. Die Topologie auf X ist dann das System $\mathcal{O}$ aller Mengen $U \subset X$ mit folgender Eigenschaft: *für alle $y \in U$ gibt es ein $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(y) \subset U$.* Überlegen Sie:

(i) $B_r(x) \in \mathcal{O}$ für alle $x \in X$, $r > 0$.

(ii) Jedes $U \in \mathcal{O}$ ist Vereinigung von offenen Kugeln.

(iii) $\mathcal{O}$ ist eine Topologie.

(iv) $(M, \mathcal{O})$ ist Hausdorffraum. //

Definition 1.3 *Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen in einem topologischen Raum X heißt Basis der Topologie, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.*

Beispiel 1.2 Sei $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ abzählbare, dichte Teilmenge eines metrischen Raums X. Dann ist das System $\{B_{\frac{1}{i}}(x_k) : i, k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der Topologie, die sogar abzählbar ist. Zum Beispiel hat $\mathbb{R}^n$ die abzählbare Basis $\{B_{\frac{1}{i}}(x) : i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n\}$. //

---

*Felix Hausdorff, 1868-1942

Beispiel 1.3 Sei $\mathcal{O}$ Topologie auf X. Für $M \subset X$ ist dann das System

$$\mathcal{O}_M = \{U \cap M : U \in \mathcal{O}\}$$

eine Topologie auf M, die von $\mathcal{O}$ induzierte Topologie auf M (auch: Teilraumtopologie oder Spurtopologie). Die folgenden Aussagen sind leicht zu verifizieren:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{O} \text{ Hausdorffsch} & \Rightarrow & \mathcal{O}_M \text{ Hausdorffsch,} \\ \mathcal{B} \text{ Basis von } \mathcal{O} & \Rightarrow & \mathcal{B}_M \text{ Basis von } \mathcal{O}_M. \end{array}$$

Zum Beispiel ist jede Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ mit der induzierten Topologie ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, vgl. Beispiel 1.2. Tatsächlich ist $M \subset \mathbb{R}^n$ auch metrischer Raum mit $d(x,y) = |x-y|$, und die induzierte Topologie stimmt mit der metrischen Topologie überein.//

Definition 1.4 *Seien X, Y topologische Räume und $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt stetig, falls folgende Implikation gilt:*

$$V \text{ offen in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \text{ offen in } X.$$

Beispiel 1.4 Sind X, Y metrische Räume, so ist Stetigkeit im Sinne von Definition 1.4 äquivalent zur Folgenstetigkeit (Übungsaufgabe). //

Beispiel 1.5 Ist $f : X \to Y$ stetig und $M \subset X$, so ist die Einschränkung

$$f|_M : M \to Y,\ (f|_M)(x) := f(x)$$

stetig bezüglich der induzierten Topologie auf M. //

Definition 1.5 *Seien U, V offene Teilmengen der topologischen Räume X bzw. Y. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt Homeomorphismus, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} beide stetig sind (als Abbildungen nach Y bzw. X).*

Wir haben nun die erforderlichen topologischen Begriffe zusammengetragen, um mit dem Konzept der Mannigfaltigkeit zu beginnen. Die zentrale Idee ist, dass lokal Koordinaten definiert werden können.

Definition 1.6 *Sei M ein topologischer Raum.*

(i) *Eine n-dimensionale Karte von M ist eine Homeomorphismus $\varphi : U \to \Omega$ zwischen offenen Mengen $U \subset X$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

(ii) *Ein n-dimensionaler C^0-Atlas von M ist ein System von n-dimensionalen Karten $\varphi_i : U_i \to \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.*

(iii) *M heißt n-dimensionale C^0-Mannigfaltigkeit (oder topologische Mannigfaltigkeit), wenn M Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist und einen C^0-Atlas besitzt.*

Wir nennen U das Kartengebiet und Ω das Parametergebiet von φ. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \Omega \to U$ heißt lokale Parametrisierung.

Die Konvergenz von Folgen in der topologischen Mannigfaltigkeit M lässt sich wie folgt charakterisieren:

> Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte mit $p \in U$, so konvergiert die Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ genau dann gegen p, wenn $p_k \in U$ für alle bis auf endlich viele k und $\varphi(p_k) \to \varphi(p)$ in $\mathbb{R}^n$.

Die Hausdorff-Bedingung garantiert, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist. Die Bedingung der abzählbaren Basis wird bei der Konstruktion einer Teilung der Eins benötigt, siehe **??**. Beim Nachweis, dass ein gegebener topologischer Raum eine Mannigfasltigkeit ist, sind natürlich beide Bedingungen nachzuprüfen. Für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit der induzierten Topologie gelten sie allerdings automatisch, vgl. Beispiel 1.3.

Zwei C^0-Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ auf dem topologischen Raum M haben notwendig die gleiche Dimension. Denn zu $x \in M$ beliebig gibt es für $i = 1,2$ Karten $\varphi_i : U_i \to \Omega_i$ in $\mathcal{A}_i$ mit $x \in U_i$, also $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Somit ist die Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Homeomorphismus zwischen offenen Teilmengen Euklidischer Räume, und die Behauptung ergibt sich aus folgendem Satz.

Satz 1.1 *Ist $f : V \to W$ Homeomorphismus zwischen offenen Mengen $V \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}^m$, so gilt $n = m$.*

Beweis: Der Satz von der Gebietsinvarianz, der mit der Theorie des Abbildungsgrads von Brouwer bewiesen wird, besagt: ist $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$ injektiv, so ist $f(V) \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir können nun $n \geq m$ und $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ annehmen (sonst betrachte f^{-1} statt f), und f als Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ auffassen. Wegen der Gebietsinvarianz ist aber dann $f(V)$ offen in $\mathbb{R}^n$, also $n = m$. □

Beispiel 1.6 Jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit der induzierten Topologie ist n-dimensionale C^0-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\mathrm{id} : \Omega \to \Omega\}$. //

Beispiel 1.7 $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ ist mit der induzierten Topologie eine C^0-Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 1$, und zwar mit folgendem Atlas:

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1 : U_1 = M \cap \{y > 0\} \to (-1,1), & \varphi_1(x,y) = x, & \varphi_1^{-1}(s) = (s, 1-|s|) \\
\varphi_2 : U_2 = M \cap \{x < 0\} \to (-1,1), & \varphi_2(x,y) = y, & \varphi_2^{-1}(s) = (|s|-1, s) \\
\varphi_3 : U_3 = M \cap \{y < 0\} \to (-1,1), & \varphi_3(x,y) = x, & \varphi_3^{-1}(s) = (s, |s|-1) \\
\varphi_4 : U_4 = M \cap \{x > 0\} \to (-1,1), & \varphi_4(x,y) = y, & \varphi_4^{-1}(s) = (1-|s|, s).
\end{array}$$

//

Beispiel 1.8 Das Kreuz $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$, mit der induzierten Topologie, ist keine eindimensionale C^0-Mannigfaltigkeit (Übungsaufgabe). //

Wie kommt nun die Differenzierbarkeit ins Spiel?

Definition 1.7 *Sei M ein topologischer Raum.*

(i) *Zwei n-dimensionale Karten $\varphi_i : U_i \to \Omega_i$, $i = 1, 2$, heißen C^∞-verträglich, wenn der Koordinatenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.*

(ii) *Ein n-dimensionaler C^0-Atlas $\mathcal{A}$ heißt C^∞-Atlas (oder differenzierbar), wenn alle Karten in $\mathcal{A}$ untereinander C^∞-verträglich sind.*

Beispiel 1.9 Die n-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ kann vom Nordpol oder vom Südpol auf die Hyperebene $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ projiziert werden; man spricht von der *stereographischen Projektion*. Dabei muss natürlich der Nordpol bzw. der Südpol selbst herausgenommen werden, das heißt wir betrachten

$$U_1 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < 1\}, \quad U_2 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > -1\}.$$

In Formeln lauten die beiden Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,t) &= \frac{x}{1-t}, \qquad \varphi_1^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, -\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}\right); \\
\varphi_2(x,t) &= \frac{x}{1+t}, \qquad \varphi_2^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}\right).
\end{aligned}$$

Es gilt $U_1 \cap U_2 = \{(x,t) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : -1 < t < 1\}$ und somit folgt

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \backslash \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Als Koordinatenwechsel ergibt sich

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \frac{\frac{2y}{1+|y|^2}}{1 - \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}} = \frac{y}{|y|^2}.$$

Also ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein C^∞-Atlas auf $\mathbb{S}^n$. //

Definition 1.8 *Ein n-dimensionaler C^∞-Atlas auf M heißt maximal, wenn jede n-dimensionale Karte, die mit allen Karten im Atlas C^∞-verträglich ist, selbst schon zu $\mathcal{A}$ gehört. Ein solcher Atlas heißt auch C^∞-Struktur oder differenzierbare Struktur auf M.*

Definition 1.9 *Eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit (oder: differenzierbare Mannigfaltigkeit) ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, zusammen mit einem n-dimensionalen, maximalen C^∞-Atlas auf M.*

In der Differentialgeometrie wird der Begriff *differenzierbar* häufig synonym mit C^∞ benutzt. Analog zu oben könnte der Begriff der C^k-Mannigfaltigkeit für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ definiert werden. Ein Satz von H. Whitney[†] besagt aber, dass ein maximaler C^k-Atlas mit $k \geq 1$ stets einen C^∞-Atlas enthält, mit dem man dann arbeiten kann.

[†] Annals of Math. **37** (1936), 645–680.

Um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit anzugeben, muss nicht der gesamte maximale Atlas hingeschrieben werden, sondern es reicht die Angabe eines Atlas. Dies liegt an folgendem

Lemma 1.1 *Sei $\mathcal{A}$ ein n-dimensionaler C^∞-Atlas auf M. Sind die n-dimensionalen Karten $\varphi_i : U_i \to \Omega_i$, $i = 1,2$, C^∞-verträglich mit allen $\varphi \in \mathcal{A}$, so sind sie auch untereinander C^∞-verträglich.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass jeder Punkt $x_0 \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ eine Umgebung hat, in der der Koordinatenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ glatt ist. Wähle dazu eine Karte $\varphi : U \to \Omega$ aus $\mathcal{A}$ mit $\varphi_1^{-1}(x_0) \in U$. Dann gilt das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \varphi_1(U \cap U_1 \cap U_2) \arrow[rr, "\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}"] \arrow[dr, "\varphi\circ\varphi_1^{-1}"'] & & \varphi_2(U \cap U_1 \cap U_2) \\ & \varphi(U \cap U_1 \cap U_2) \arrow[ur, "\varphi_2\circ\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Die Behauptung folgt somit aus der Kettenregel. □

Satz 1.2 *Jeder n-dimensionale C^∞-Atlas $\mathcal{A}$ auf M ist in genau einem maximalen n-dimensionalen C^∞-Atlas $\mathcal{A}'$ enthalten.*

Beweis: Wir zeigen erst die Eindeutigkeit. Seien $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ maximal mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$. Zwei Karten $\varphi' \in \mathcal{A}'$, $\varphi'' \in \mathcal{A}''$ sind mit allen $\varphi \in \mathcal{A}$ differenzierbar verträglich, also sind φ', φ'' untereinander C^∞-verträglich nach Lemma 1.1. Damit ist φ' mit *allen* $\varphi'' \in \mathcal{A}''$ verträglich und es folgt $\varphi' \in \mathcal{A}''$, da $\mathcal{A}''$ maximal. Dies beweist $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ und aus Symmetriegründen gilt dann $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''$.

Für die Existenz setze

$$\mathcal{A}' = \{\varphi : \varphi \text{ ist Karte, die mit } \mathcal{A} \text{ differenzierbar verträglich ist}\}.$$

Es folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}'$ ist C^∞-Atlas nach Lemma 1.1. Außerdem ist $\mathcal{A}'$ maximal. □

Wir wollen nun ein paar Beispiele von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten betrachten.

Beispiel 1.10 Ist M eine C^0-Mannigfaltigkeit und besteht der zugehörige Atlas $\mathcal{A}$ nur aus einer Karte $\varphi : M \to \Omega$, so ist M automatisch eine C^∞-Mannigfaltigkeit, denn die Bedingung aus Definition 1.7 ist leer. Zum Beispiel ist jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in kanonischer Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit, als Karte wählt man $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ mit dieser Struktur eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. //

Beispiel 1.11 Die n-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, versehen mit der induzierten Topologie und mit dem durch die stereographischen Projektionen gegebenen Atlas, siehe Beispiel 1.9, ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. //

Beispiel 1.12 Das in Beispiel 1.7 betrachtete Quadrat

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$$

ist mit dem dort angegebenen Atlas eine eindimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zum Beispiel berechnet man für die ersten beiden Karten $U_1 \cap U_2 = \{(x, y) \in M : x < 0,\, y > 0\}$ und erhält als Koordinatenwechsel

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) = (-1, 0) \to (0, 1) = \varphi_2(U_1 \cap U_2),\ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(s) = 1 + s.$$

Entsprechend sind auch die anderen drei Koordinatenwechsel differenzierbar. //

Beispiel 1.13 Sind M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n, so ist $M \times N$ kanonisch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$, die Produktmannigfaltigkeit von M und N (Anwesenheitsaufgabe). //

Um als weiteres Beispiel die projektiven Räume einzuführen, benötigen wir den Begriff der Quotiententopologie.

Definition 1.10 *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum X, mit der Quotientenprojektion $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto \pi(x) = [x]$. Dann ist auf $X/\sim$ wie folgt eine Topologie, die Quotiententopologie, definiert:*

$$U \subset X/\sim \ \textit{offen} \quad \Leftrightarrow \quad \pi^{-1}(U) \subset X \ \textit{offen.}$$

Bezüglich der Quotiententopologie ist $\pi : X \to X/\sim$ stetig.

Beispiel 1.14 Definiere auf $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } x = \lambda y.$$

Der resultierende Quotientenraum $\mathbb{RP}^n$ heißt n-dimensionaler reell-projektiver Raum. Als Menge besteht $\mathbb{RP}^n$ einfach aus allen Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$; die Topologie ist natürlich die Quotiententopologie. Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{RP}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

Zunächst zeigen wir, dass die Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{RP}^n$ offen ist, also offene Mengen in offene Mengen abbildet. Es reicht, eine offene Kugel $B_r(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ zu betrachten. Zu $y \in \pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $|\lambda y - x| < r$, also $\varrho := r - |\lambda y - x| > 0$. Für $|z - y| < \varrho/|\lambda|$ folgt

$$|\lambda z - x| \leq |\lambda|\,|z - y| + |\lambda y - x| < \varrho + (r - \varrho) = r.$$

Also gilt $B_{\varrho/|\lambda|}(y) \subset \pi^{-1}(\pi(B_r(x)))$ und $\pi(B_r(x)) \subset \mathbb{RP}^n$ ist offen bzgl. der Quotiententopologie. Insbesondere hat die Topologie auf $\mathbb{RP}^n$ die abzählbare Basis $\{\pi(U_i) : i \in \mathbb{N}\}$, wobei $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ abzählbare Basis der Topologie auf $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$.

Auch die Einschränkung $\pi|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ ist offen, denn die Abbildung

$p : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{S}^n$, $p(x) = \frac{x}{|x|}$ ist stetig und somit ist $\pi(U) = \pi(p^{-1}(U))$ offen für $U \subset \mathbb{S}^n$ offen. Für die Hausdorff-Eigenschaft seien $[x_1] \neq [x_2] \in \mathbb{RP}^n$, oBdA mit $|x_1| = |x_2| = 1$. Aus Kompaktheitsgründen gilt dann

$$\delta := \inf\{|x_1 - \lambda x_2| : \lambda \in \mathbb{R},\, |\lambda| = 1\} > 0.$$

Die Mengen $U_i = \pi(B_{\delta/2}(x_i) \cap \mathbb{S}^n)$ sind offen in $\mathbb{RP}^n$ mit $[x_i] \in U_i$. Wäre $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, so gäbe es $y_i \in \mathbb{S}^n$, $i = 1, 2$, mit $|y_i - x_i| < \delta/2$ und $y_1 \sim y_2$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $y_1 = \lambda y_2$, also sogar $|\lambda| = 1$. Es folgt

$$|x_1 - \lambda x_2| \leq |x_1 - y_1| + |\lambda y_2 - \lambda x_2| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ein Widerspruch zur Definition von δ. Damit ist die Hausdorff-Eigenschaft gezeigt.

Für $i = 1, \ldots, n+1$ und $U_i = \pi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i \neq 0\})$ betrachte nun

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n,\, \varphi_i([x]) &= \frac{1}{x^i}\,(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}), \\ \psi_i : \mathbb{R}^n \to U_i,\, \psi_i(\xi) &= \pi(\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \ldots, \xi^n). \end{aligned}$$

Die Abbildungen φ_i, ψ_i sind zueinander invers, und ψ_i ist offensichtlich stetig. Die Stetigkeit von φ_i folgt aus $\varphi_i^{-1}(V) = \pi(p_i^{-1}(V))$ für $V \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$p_i : \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i \neq 0\} \to \mathbb{R}^n,\, p_i(x) = \frac{1}{x^i}\,(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}).$$

Für $i \neq j$ erhalten wir die Kartenwechsel

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n\backslash\{\xi^j = 0\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{\xi^i = 0\},\, \xi \mapsto \frac{1}{\xi_j}(\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, 1, \xi^i, \ldots, \xi^{j-1}, \xi^{j+1}, \ldots, \xi^n).$$

Die Kartenwechsel sind C^∞-Funktionen, also ist $\mathbb{RP}^n$ mit diesem Atlas eine kompakte, n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. //

Beispiel 1.15 Der komplex-projektive Raum wird völlig analog definiert als $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$, wobei

$$z \sim w \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \text{ mit } z = \lambda w.$$

Eine Analyse des vorangehenden Beispiels zeigt, dass die Überlegungen vollständig übernommen werden können. Insbesondere ist die Projektion $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{CP}^n$ offen, die Quotiententopologie hat eine abzählbare Basis und ist Hausdorffsch. Die Kartenabbildungen bilden nun nach $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ ab, und die Kartenwechsel sind von der Form

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^n\backslash\{\zeta^j = 0\} \to \mathbb{C}^n\backslash\{\zeta^i = 0\},\, \xi \mapsto \frac{1}{\zeta_j}(\zeta^1, \ldots, \zeta^{i-1}, 1, \zeta^i, \ldots, \zeta^{j-1}, \zeta^{j+1}, \ldots, \zeta^n).$$

Dies sind wieder C^∞-Diffeomorphismen von offenen Gebieten im $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, also ist $\mathbb{CP}^n$ eine kompakte, $2n$-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Tatsächlich sind die Kartenwechsel sogar komplex differenzierbar, und damit ist $\mathbb{CP}^n$ eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. //

Der folgende Satz liefert ein grundsätzliches Verfahren, um auf einer Menge ohne gegebene Topologie die Struktur einer Mannigfaltigkeit zu definieren.

Satz 1.3 *Sei M eine Menge und $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, ein System von bijektiven Abbildungen von $U_\lambda \subset M$ auf offene Mengen $V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$. Es gelte:*

(1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$.

(2) $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ *ist offen für alle* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

(3) $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ *ist stetig für alle* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf M, so dass $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein C^0-Atlas ist. Wird M durch eine abzählbare Teilfamilie $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$ überdeckt, so hat $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass M eine C^0-Mannigfaltigkeit ist, ist im Einzelfall noch die Hausdorff-Eigenschaft nachzuweisen!

Beweis: (von Satz 1.3) Wir definieren die gesuchte Topologie durch

$$\mathcal{O} = \{U \subset M : \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n \text{ ist offen für alle } \lambda \in \Lambda\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie, wie sich aus folgenden Tatsachen ergibt:

(i) $\varphi_\lambda(M \cap U_\lambda) = V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ ist offen nach Voraussetzung.

(ii) Für $W_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$, gilt $\varphi_\lambda((\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha) \cap U_\lambda) = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\lambda(W_\alpha \cap U_\lambda)$.

(iii) Für $W_i \subset M$, $i = 1, \ldots, N$, gilt $\varphi_\lambda((\bigcap_{i=1}^N W_i) \cap U_\lambda) = \bigcap_{i=1}^N \varphi_\lambda(W_i \cap U_\lambda)$.

Bezüglich $\mathcal{O}$ sind die Mengen U_λ offen nach Voraussetzung (2). Weiter ist $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ stetig, denn für $V \subset V_\lambda$ offen und $\mu \in \Lambda$ ist

$$\varphi_\mu(\varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\mu) = \underbrace{(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})}_{(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})^{-1}}(V \cap \underbrace{\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)}_{\text{offen}})$$

offen. Schließlich ist $\varphi_\lambda^{-1} : V_\lambda \to U_\lambda$ nach Definition stetig, denn für $U \in \mathcal{O}$ mit $U \subset U_\lambda$ ist $\varphi_\lambda(U) = \varphi(U \cap U_\lambda)$ offen. Damit sind die $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ Homeomorphismen und bilden einen C^0-Atlas auf M.

Sei $\mathcal{O}'$ eine Topologie, so dass die $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ homeomorph sind. Für $U \in \mathcal{O}$ folgt dann

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\underbrace{\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda)}_{\text{offen}}) \in \mathcal{O}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'.$$

Ist umgekehrt $U \in \mathcal{O}'$, so ist $U \cap U_\lambda \in \mathcal{O}'$ und $\varphi_\lambda(U \cap U_\lambda)$ ist offen, für alle $\lambda \in \Lambda$. Dies bedeutet $U \in \mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

Schließlich gelte $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$ mit Λ' abzählbar. Jedes V_λ hat eine abzählbare Basis $\{V_{\lambda,i} : i \in \mathbb{N}\}$ bzgl. der Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{U_{\lambda,i} = \varphi^{-1}(V_{\lambda,i}) : i \in \mathbb{N}\}$ abzählbare Basis für U_λ und somit $\{U_{\lambda,i} : \lambda \in \Lambda', i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{O}$ auf M. $\square$

Definition 1.11 *Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn für $A \subset X$ folgende Implikation gilt:*

$$A \text{ offen und abgeschlossen, } A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = X.$$

Mit anderen Worten besagt die Definition: es gibt keine nichttriviale Zerlegung von X in offene Mengen.

Beispiel 1.16 Das Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Denn sei $A \subset [0,1]$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Dann folgt für die charakteristische Funktion $\chi'_A \equiv 0$, also $\chi_A \equiv 1$ bzw. $A = X$. //

Definition 1.12 *Sei X topologischer Raum, und $x_0, x_1 \in X$. Ein Weg von x_0 nach x_1 ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([0,1], X)$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Wenn es einen solchen Weg gibt, so heißen x_0, x_1 verbindbar. X heißt wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ verbindbar sind.*

Lemma 1.2 *Sei X ein topologischer Raum.*

(i) *„verbindbar“ ist Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten.*

(ii) *X wegzusammenhängend $\Rightarrow$ X zusammenhängend.*

Beweis: Für (i) prüfen wir die drei Eigenschaften:

$x \sim x$**:** wähle $\gamma(t) \equiv x$ für alle $t \in [0,1]$.

$x_0 \sim x_1 \Rightarrow x_1 \sim x_0$**:** sei γ Weg von x_0 nach x_1; wähle $\sigma(t) = \gamma(1-t)$ für $t \in [0,1]$.

$x_0 \sim x_1,\ x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_0 \sim x_2$**:** Seien γ_1, γ_2 Wege von x_0 nach x_1 bzw. x_1 nach x_2. Wähle

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Für (ii) sei $A \subset X$ offen und abgeschlossen, und $x_0 \in A$. Nach Vorassetzung gibt es zu $x \in X$ einen Weg γ von x_0 nach x. Dann ist $\gamma^{-1}(A) \subset [0,1]$ offen und abgeschlossen, sowie $0 \in \gamma^{-1}(A)$. Nach Beispiel 1.16 ist dann $x = \gamma(1) \in A$, also $A = X$. □

Die folgende Aussage beruht darauf, dass eine Mannigfaltigkeit *lokal* wegweise zusammenhängend ist.

Satz 1.4 *Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$M \quad \text{wegzusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad M \quad \text{zusammenhängend.}$$

Beweis: Es ist nur noch die Aussage „$\Leftarrow$“ zu zeigen. Der Beweis beruht darauf, dass M *lokal* wegweise zusammenhängend ist. Wähle nämlich zu $x \in M$ eine Karte $\varphi : U \to V$ mit $x \in U$. Für $r > 0$ hinreichend klein gilt $B_r(\varphi(x)) \subset V$, und $U_x := \varphi^{-1}\big(B_r(\varphi(x))\big)$ ist wegweise zusammenhängend.

Sei nun $x_0 \in M$ beliebig und A die Wegkomponente von x_0. Ist $x \in A$ und $y \in U_x$, also $x_0 \sim x$ und $x \sim y$, so folgt $x_0 \sim y$ bzw. $U_x \subset A$. Also ist A offen. Sei umgekehrt $x \notin A$.

Angenommen es gibt $y \in U_x \cap A$. Dann gilt $x_0 \sim y$ und $y \sim x$, folglich $x_0 \sim x$, Widerspruch. Dies bedeutet $U_x \subset M \backslash A$, also A abgeschlossen. Wegen $x_0 \in A$ folgt $A = M$, das heißt M ist wegzusammenhängend. $\square$

Beispiel 1.17 Die folgende Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend:

$$M = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

//

2 Differenzierbare Abbildungen und Überlagerungen

Definition 2.1 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt k-mal stetig differenzierbar (wobei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$), wenn es zu jedem $p \in M$ eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$ und eine Karte $\psi : V \to \psi(V)$ gibt*, so dass $f(U) \subset V$ und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$.*

B i l d

Notation: $f \in C^k(M, N)$ bzw. $f \in C^k(M)$ im Fall $N = \mathbb{R}$ (versehen mit der Standardstruktur).

Bemerkung. Seien $\varphi' : U' \to \varphi(U')$ bzw. $\psi' : V' \to \psi(V')$ irgendwelche Karten im jeweiligen maximalen Atlas. Ist $f \in C^k(M, N)$ und $f(U') \subset V'$, so folgt $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} \in C^k(\varphi'(U'))$. Zu $p \in U'$ wähle nämlich $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ wie in Definition 2.1. Die Behauptung ergibt sich aus folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\varphi(U\cap U') \arrow[rrr, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in C^k"] & & & \psi(V\cap V') \arrow[dd, "\psi'\circ\psi^{-1}\in C^\infty"] \\
& U\cap U' \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[dl, "\varphi'"] \arrow[r, "f"] & V\cap V' \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\
\varphi'(U\cap U') \arrow[uu, "\varphi\circ(\varphi')^{-1}\in C^\infty"] \arrow[rrr, "\psi'\circ f\circ(\varphi')^{-1}"] & & & \psi'(V\cap V')
\end{tikzcd}$$

Beispiel 2.1 Betrachte $\mathbb{S}^n$ mit den Karten φ_1, φ_2 aus Beispiel 1.9 (stereographische Projektion von Nordpol bzw. Südpol). Für $\lambda > 0$ sei

$$\tau_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \tau_\lambda(x) = \lambda\, x.$$

Definiere nun $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ wie folgt:

$$\sigma_\lambda(p) = \begin{cases} \big(\varphi_1^{-1} \circ \tau_\lambda \circ \varphi_1\big)(p) & \text{falls } p \neq (0,1) \\ (0,1) & \text{falls } p = (0,1). \end{cases}$$

Wir zeigen, dass σ_λ eine C^∞-Abbildung ist: für $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_1) \subset U_1$ und

$$\varphi_1 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_1^{-1} = \tau_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

*jeweils im maximalen C^∞-Atlas von M bzw. N

Für $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma_\lambda(U_2) \subset U_2$ und

$$\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} \circ \tau_\lambda \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

Nach Beispiel 1.9 ist $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) = x/|x|^2$, also folgt für $x \neq 0$

$$(\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1})(x) = \frac{\tau_\lambda\left(x/|x|^2\right)}{|\tau_\lambda\left(x/|x|^2\right)|^2} = \frac{1}{\lambda}x.$$

Insgesamt folgt $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, insbesondere für $x = 0$, also ist $\varphi_2 \circ \sigma_\lambda \circ \varphi_2^{-1} \in C^\infty$. //

Definition 2.2 *Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist, und f, f^{-1} von der Klasse C^∞ sind.*

Beispiel 2.2 Die Abbildung $\sigma_\lambda : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist ein Diffeomorphismus, denn $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{1/\lambda}$. //

Beispiel 2.3 Betrachte auf $\mathbb{R}$ die beiden Atlanten

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = x\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = x^3\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ definieren verschiedene differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$, denn die Karten sind nicht einmal C^1-verträglich (geschweige denn C^∞):

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} :&\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto s^3 \\ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} :&\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{t} & t \geq 0 \\ \sqrt[3]{-t} & t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ist nicht differenzierbar in $t = 0$. Die Abbildung

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2), \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$$

ist aber ein Diffeomorphismus! Denn

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ \varphi_1 \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1} &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

//

Auf der Menge der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (mit maximalen Atlanten) ist

$$M \sim N \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ diffeomorph } N$$

eine Äquivalenzrelation; ihre Äquivalenzklassen heißen Diffeomorphietypen. Natürlich ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit insbesondere eine topologische Mannigfaltigkeit. Es ist eine sehr schwierige Frage, wieviele verschiedene Mannigfaltigkeiten – im Sinn von nicht homeomorph oder nicht diffeomorph - es in der jeweiligen Dimension gibt. Hier nur einige Ausblicke ohne Beweis, wobei wir stets von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ausgehen:

- Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keinen differenzierbaren Atlas besitzen. Das erste Beispiel einer 10-dimensionalen Mannigfaltigkeit stammt von Kervaire (1960). Donaldson fand 1984 vierdimensionale Beispiele, indem er den Lösungsraum einer gewissen partiellen Differentialgleichung aus der Elementarteilchenphysik untersuchte, nämlich der Yang-Mills-Gleichung.

- Es gibt Beispiele von topologischen Mannigfaltigkeiten, die mehrere, nicht diffeomorphe differenzierbare Strukturen besitzen. So gibt es auf der 7-dimensionalen Sphäre 28 verschiedene differenzierbare Strukturen (Milnor 1964). Und 1984 zeigte Gompf (aufbauend auf den Resultaten von Donaldson) die Existenz überabzählbar vieler, nicht diffeomorpher C^∞-Strukturen auf $\mathbb{R}^4$!

- Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist die einzige kompakte, eindimensionale Mannigfaltigkeit sowohl im C^0-Sinn als auch im C^∞-Sinn. Die einzige nichtkompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{R}$. Den C^∞-Fall werden wir ohne Mühe in der Vorlesung beweisen. Im zweidimensionalen Fall hat man eine Sequenz von kompakten, orientierbaren Flächen: die Sphäre, den Torus, die Brezel (2 Löcher), usw. Die Fläche mit zwei Löchern kann aus 2 Tori konstruiert werden, indem man aus diesen jeweils eine kleine Kreisscheibe entfernt und sie dann durch Einsetzen eines Zylinderstücks verbindet (Konstruktion der zusammenhängenden Summe). Entsprechend kann die Fläche mit p Löchern als zusammenhängende Summe von p Tori aufgefasst werden.

  B i l d

  Die nicht orientierbaren Flächen ergeben sich analog als zusammenhängende Summe von projektiven Ebenen. Auf diese Weise erhält man eine komplette Liste aller kompakten, zweidimensionalen Typen von Flächen, wobei wieder zwischen *homeomorph* und *diffeomorph* kein Unterschied besteht. Der Beweis ist aber schon weitaus schwieriger, im differenzierbaren Fall folgt die Aussage aus dem Uniformisierungssatz von Poincaré aus der komplexen Analysis. Für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt es ein Programm von Thurston, die kompakten Mannigfaltigkeiten ebenfalls in gewisse Grundbausteine zu zerlegen. Dies ist Gegenstand der aktuellen Forschung.

Die Verkettung von C^k-Abbildungen ist wieder eine C^k-Abbildung, das heißt

$$f \in C^k(M,N),\, g \in C^k(N,P) \quad \Rightarrow \quad g \circ f \in C^k(M,P). \tag{2.1}$$

Wähle zu $p \in M$ Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ auf M, $\psi : V \to \psi(V)$ auf N und $\chi : W \to \chi(W)$ auf P, so dass $p \in U$, $f(p) \in V$ und $g\big(f(p)\big) \in W$. Wir können annehmen, dass $f(U) \subset V$ und $g(V) \subset W$, andernfalls ersetze erst V durch $V \cap g^{-1}(W)$ und dann U durch $U \cap f^{-1}(V)$. Behauptung (2.1) folgt dann aus der C^k-Kettenregel:
Diagramm

Satz 2.1 *Die Menge* Diff(M) *der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M ist eine Untergruppe der Bijektionen von M.*

Beweis: Für $f, g \in \mathrm{Diff}(M)$ ist $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Diff}(M)$ wegen (2.1). □

Definition 2.3 *Eine Untergrupe $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf der Mannigfaltigkeit M, falls gilt:*

(i) *$g(p) \neq p$ für alle $p \in M$, $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$.*

(ii) *Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ gibt es offene Umgebungen U bzw. V, so dass $g(U) \cap V = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma$ mit $g(p) \neq q$.*

$\square$

Bemerkung. Nicht selten ist die Topologie auf M durch eine Metrik $d(\cdot\,,\cdot)$ induziert, bezüglich der die Gruppe Γ isometrisch operiert, das heißt

$$d\big(g(x), g(y)\big) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M,\ g \in \Gamma.$$

Ist dann für gegebene $p, q \in M$

$$\delta := \inf\{d\big(g(p), q\big) : g \in \Gamma, g(p) \neq q\} > 0, \tag{2.2}$$

so ist die Bedingung (ii) in Definition 2.3 erfüllt mit $U = B_{\delta/2}(p)$, $V = B_{\delta/2}(q)$. Denn wäre $x \in g(U) \cap V$ für ein $g \in \Gamma$ mit $g(p) \neq q$, so folgt $d\big(g(p), x\big) = d\big(p, g^{-1}(x)\big) < \delta/2$ wegen $g^{-1}(x) \in U = B_{\delta/2}(p)$, und hieraus

$$d\big(g(p), q\big) \leq d\big(g(p), x\big) + d(x, q) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ein Widerspruch zu (2.2). Insbesondere ist Bedingung (ii) in Definition 2.3 immer erfüllt, wenn eine endliche Gruppe bzgl. einer Metrik isometrisch operiert.

Beispiel 2.4 Die Gruppe $\Gamma = \{\pm\mathrm{id}\}$ mit zwei Elementen operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Denn es gilt $-p \neq p$ für alle $p \in \mathbb{S}^n$, und Γ operiert isometrisch bzgl. $d(p, q) = |p - q|$. //

Beispiel 2.5 Die Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^n$ durch Translationen:

$$\tau_k(p) = p + k \qquad \text{für } p \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Die Operation ist trivialerweise frei, und isometrisch zum Beispiel bezüglich der Metrik $d(p, q) = \|p - q\|_\infty$. Es ist leicht zu sehen, dass Bedingung (2.2) erfüllt ist, das heißt es gilt

$$\delta := \inf\{\|p + k - q\|_\infty : k \in \mathbb{Z}^n, p + k \neq q\} > 0.$$

//

Definition 2.4 *Für eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Diff}\,(M)$ ist durch*

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g \in \Gamma \quad \textit{mit } g(p) = q$$

ein Äquivalenzrelation auf M gegeben. Die Menge der Äquivalenzklassen, versehen mit der Quotiententopologie, wird mit M/Γ bezeichnet.

Definition 2.5 *Eine stetige und surjektive Abbildung $\pi : M \to X$ zwischen topologischen Räumen heißt Überlagerung, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

mit $V_i \subset M$ offen, paarweise disjunkt und $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ homeomorph.

Bemerkung. Sei $\pi : M \to X$ Überlagerung und X zusammenhängend. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist die Menge

$$X_k = \{x \in X : \operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} = k\}$$

offen. Denn für $x \in X_k$ gilt $U \subset X_k$ mit U wie in Definition 2.5. Wähle nun $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $X_k \neq \emptyset$, dann ist $X \backslash X_k = \bigcup_{l \neq k} X_l$ offen, also $X = X_k$ nach Voraussetzung bzw. $\operatorname{card} \pi^{-1}\{x\} \equiv k$. Man bezeichnet k als den Grad der Überlagerung π.

Satz 2.2 *Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe $\Gamma \subset \operatorname{Diff}(M)$ frei und eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *$X = M/\Gamma$ ist Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, und die Projektion $\pi : M \to X$ ist eine Überlagerung.*

(ii) *Es gibt genau eine differenzierbare Struktur auf X, so dass π lokal diffeomorph ist.*

Beweis: Für $V \subset M$ gilt $\pi^{-1}\big(\pi(V)\big) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(V)$, folglich ist die Projektion $\pi : M \to X$ offen. Zum Beweis der Hausdorff-Eigenschaft seien $p, q \in M$ mit $\pi(p) \neq \pi(q)$. Für U, V wie in Definition 2.3(ii) sind $\pi(U)$, $\pi(V)$ offene Umgebungen der Punkte $\pi(p)$, $\pi(q) \in X$. Wäre $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$, so gibt es $p' \in U$, $q' \in V$ mit $\pi(p') = \pi(q')$, also $g(p') = q'$ für ein $g \in \Gamma$. Aber $g(p) \neq q$ wegen $\pi(p) \neq \pi(q)$, also gilt $g(U) \cap V = \emptyset$ nach Wahl von U, V, ein Widerspruch.

Eine abzählbare Basis der Topologie von M/Γ erhält man durch Projektion einer abzählbaren Basis der Topologie von M.

Indem wir in Definition 2.3(ii) die Mengen U, V durch $U \cap V$ ersetzen, erhalten wir zu $p \in M$ eine offene Umgebung U mit $g(U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$. Dann gilt $\pi^{-1}\big(\pi(U)\big) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(U)$, wobei $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ für alle $g_1, g_2 \in \Gamma$ mit $g_1 \neq g_2$; andernfalls wäre $(g_2^{-1} \circ g_1)(U) \cap U \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von U. Für $g \in \Gamma$ ist $g(U)$ offen sowie $\pi : g(U) \to \pi(U)$ stetig, offen und bijektiv. Denn wäre $\pi(q_1) = \pi(q_2)$ für $q_i \in g(U)$, $q_1 \neq q_2$, so folgt $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ für $p_i = g^{-1}(q_i) \in U$, sowie $p_1 \neq p_2$. Es gibt also $g' \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$ mit $g'(p_1) = p_2$ bzw. $g'(U) \cap U \neq \emptyset$, ein Widerspruch zur Wahl von U. Damit ist Behauptung (i) bewiesen.

Als nächstes konstruieren wir die gesuchte differenzierbare Struktur. Wie bereits gezeigt, gibt es zu $p \in M$ eine Umgebung U_p mit folgenden Eigenschaften:

- $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$
- es gibt eine Karte $\psi_p : U_p \to W_p \subset \mathbb{R}^m$.

Definiere nun auf X die Karten

$$\varphi_p = \psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1} : \pi(U_p) \to \psi(U_p) \subset \mathbb{R}^m.$$

Die φ_p sind homeomorph, und es bleibt nur die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel $\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ zu zeigen. Sei $\pi(p') = \pi(q')$ für $p' \in U_p$, $q' \in U_q$, also $q' = g(p')$ mit einem $g \in \Gamma$. Setze $U'_p = U_p \cap g^{-1}(U_q)$ und $U'_q = U_q \cap g(U_p)$. Es gilt $g(U'_p) = U'_q$ und

$$\pi|_{U_q} \circ g = \pi|_{U_p} \text{ auf } U'_p \quad \Rightarrow \quad (\pi|_{U_q})^{-1} \circ \pi|_{U_p} = g \text{ auf } U'_p.$$

Daraus folgt

$$\varphi_q \circ \varphi_p^{-1} = \big(\psi_q \circ (\pi|_{U_q})^{-1}\big) \circ \big(\psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1}\big)^{-1} = \psi_q \circ g \circ \psi_p^{-1} \quad \text{auf } \psi_p(U_p').$$

Die rechte Seite ist die Koordinatendarstellung des Diffeomorphismus g, also in C^∞.

Sei schließlich $\mathcal{A}$ ein Atlas auf X, so dass $\pi : M \to X$ lokal diffeomorph ist. Dann ist für jede Karte $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ in $\mathcal{A}$ und jede Karte $\psi_p : U_p \to \psi_p(U_p)$ die zugehörige Koordinatendarstellung

$$\varphi \circ \pi \circ \psi_p^{-1} : \varphi_p\big(\pi(U_p) \cap \Omega\big) \to \varphi\big(\pi(U_p) \cap \Omega\big)$$

diffeomorph. Wegen $\varphi_p = \psi_p \circ (\pi|_{U_p})^{-1}$ bedeutet dies, dass die Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_p^{-1}$ differenzierbar sind, d. h. $\mathcal{A}$ definiert dieselbe differenzierbare Struktur. □

Beispiel 2.6 Laut Beweis des Satzes erhalten wir auf $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ wie folgt einen C^∞-Atlas: für $p \in \mathbb{R}^n$ setze $U_p = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p\|_\infty < \frac{1}{2}\}$. Dann gilt $\tau_k(U_p) \cap U_p = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$. Da U_p selbst offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, lauten die Karten hier einfach

$$\varphi_p : \pi(U_p) \to U_p \subset \mathbb{R}^n,\ \varphi_p = (\pi|_{U_p})^{-1}.$$

Ist nun $q' = p' + k$ für $p' \in U_p$, $q' \in U_q$ und $k \in \mathbb{Z}^n$, so folgt aus dem Beweis des Satzes

$$\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}|_{U_p'} = \tau_k|_{U_p'} \quad \text{mit } U_p' = U_p \cap \tau_k(U_q).$$

//

Beispiel 2.7 Seien $\pi_1 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{\pm\mathrm{id}\}$ bzw. $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{RP}^n$ die Projektionsabbildungen, siehe auch Beispiel 1.14. Die Abbildung

$$f : \mathbb{S}^n/\{\pm\mathrm{id}\} \to \mathbb{RP}^n,\ f(\{\pm x\}) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$$

ist offensichtlich wohldefiniert und bijektiv, und wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \subset & \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{S}^n/\{\pm\mathrm{id}\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{RP}^n \end{array}$$

f ist ein Homeomorphismus, denn einerseits gilt für $U \subset \mathbb{RP}^n$ offen

$$\pi_1^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi_1)^{-1}(U) = \pi_2^{-1}(U) \cap \mathbb{S}^n = \text{ offen in } \mathbb{S}^n.$$

Andererseits gilt für $V \subset S^n/\{\pm\mathrm{id}\}$

$$\pi_2^{-1}(f(V)) \cap \mathbb{S}^n = (f \circ \pi_1)^{-1}(f(V)) = \pi_1^{-1}(V).$$

Für $V \subset \mathbb{S}^n/\{\pm\mathrm{id}\}$ offen ist damit $\pi_2^{-1}(f(V)) \cap \mathbb{S}^n$ offen in $\mathbb{S}^n$, das heißt $\pi_2^{-1}(f(V))$ offen in $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, also $f(V)$ offen in $\mathbb{RP}^n$. Jetzt ist noch die Differenzierbarkeit von f und f^{-1}

zu zeigen. Zu diesem Anlass führen wir einen neuen Atlas auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ein, und zwar betrachten wir für $i = 1, \ldots, n+1$ und $\sigma = 1, -1$

$$\varphi_i^\sigma : U_i^\sigma = \{x \in \mathbb{S}^n : \operatorname{sign}(x^i) = \sigma\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{1}{x^i}(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}).$$

Die Umkehrabbildung lautet

$$(\varphi_i^\sigma)^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i^\sigma,\ \xi \mapsto \frac{\sigma}{\sqrt{1+|\xi|^2}}(\xi^1, \ldots, \xi^{i-1}, 1, \xi^{i+1}, \ldots, \xi^n).$$

Aus den Formeln folgt, dass es sich hierbei um einen differenzierbaren Atlas handelt und dass die Karten mit den stereographischen Projektionen differenzierbar verträglich sind. Verwenden wir auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die Koordinaten aus Beispiel 1.14, i.e.

$$\varphi_i : \{[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n : x^i \neq 0\} \to \mathbb{R}^n,\ \varphi_i([x]) = \frac{1}{x^i}(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}) \text{ für } i = 1, \ldots, n+1,$$

so ergeben sich für f die diffeomorphen, denkbar einfachen Koordinatendarstellungen

$$\varphi_i \circ f \circ (\varphi_i^\sigma)^{-1} = \mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

//

Definition 2.6 *Sei X wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Eine Schleife in x_0 ist eine stetige Kurve $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = c(1) = x_0$. Zwei Schleifen c_0, c_1 in x_0 heißen homotop (mit festem Basispunkt x_0), wenn es eine Abbildung $h \in C^0([0,1] \times [0,1], X)$ gibt mit den Eigenschaften*

$$h(\,\cdot\,, 0) = c_0,\ h(\,\cdot\,, 1) = c_1 \textit{ und } h(0,t) = h(1,t) = x_0 \textit{ für alle } t \in [0,1].$$

Zwischen den möglichen Überlagerungen einer Mannigfaltigkeit X und der Menge der Homotopieklassen von Schleifen in X besteht ein enger Zusammenhang. Wir formulieren hier nur ohne Beweis eine wesentliche Konsequenz der Überlagerungstheorie, und kommen ggf. später darauf zurück.

Definition 2.7 *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn jede Schleife $c : [0,1] \to X$ in x_0 homotop zur konstanten Schleife $c(s) \equiv x_0$ ist. Diese Eigenschaft hängt nicht von der Wahl des Basispunkts x_0 ab.*

Beispiel 2.8 Jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, und allgemeiner jede sternförmige Menge (beachte, dass die Menge nicht notwendig sternförmig bzgl. des gegebenen Basispunkts x_0 sein muss). Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind einfach zusammenhängend genau für $n \geq 2$. //

Satz 2.3 *Sei X eine zusammenhängende, m-dimensionale Mannigfaltigkeit, und $x_0 \in X$. Dann existiert eine einfach zusammenhängende, m-dimensionale Mannigfaltigkeit M und eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$, die frei und eigentlich diskontinuierlich operiert, so dass X diffeomorph zum Quotienten M/Γ ist. Die Projektion $\pi : M \to X \simeq M/\Gamma$ heißt universelle Überlagerung. Sie ist eindeutig in folgendem Sinn: ist $\pi' : M' \to X$ ebenfalls Überlagerung mit M' einfach zusammenhängend, so gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi : M' \to M$ mit $\pi' = \pi \circ \Phi$.*

3 Tangentialvektoren und Differential

Die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : M \to N$ ist über ihre Koordinatendarstellungen definiert, unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Doch was ist die Ableitung von f? Hierzu müssen wir als erstes erklären, was der Tangentialraum von M in einem Punkt p sein soll. Es gibt drei verschiedene Zugänge:

a) geometrisch als Tangentenvektoren von Kurven

b) physikalisch mittels Koordinatenvektoren

c) algebraisch als Ableitungsoperatoren

Wir werden mit dem ersten Zugang beginnen. Die Idee ist, den Tangentialvektor durch Kurven zu repräsentieren, die in einer Koordinatendarstellung dieselbe Ableitung haben.

Definition 3.1 *Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein Tangentialvektor von M ist eine Äquivalenzklasse $[c]$ von C^1-Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ unter folgender Äquivalenzrelation:**

$$c_1 \sim c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_1(0) = c_2(0) \text{ und } (\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$$
$$\text{für eine Karte } \varphi : U \to \varphi(U) \text{ von } M.$$

Die Menge aller Tangentialvektoren von M heißt Tangentialbündel TM. Es gibt eine wohldefinierte Abbildung, die Projektion auf den Fußpunkt,

$$\pi : TM \to M,\ \pi([c]) = c(0).$$

Der Tangentialraum von M in p ist die Menge $T_pM = \pi^{-1}\{p\} \subset TM$.

Beispiel 3.1 Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in U$ ist T_xU kanonisch bijektiv zu $\mathbb{R}^n$ vermöge der Abbildung

$$T_xU \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto c'(0).$$

Die Injektivität folgt unmittelbar aus der Definition des Tangentialvektors. Für die Surjektivität betrachte für gegebenes $v \in \mathbb{R}^n$ die Kurve

$$c_{x,v} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U,\ c_{x,v}(t) = x + tv \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \text{ hinreichend klein.} \tag{3.1}$$

Offenbar gilt dann $[c_{x,v}] \mapsto v$. //

Das Differential kann nun als Abbildung zwischen den Tangentialräumen erklärt werden.

Definition 3.2 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M, N)$. Das Differential von f ist die Abbildung*

$$Df : TM \to TN,\ [c] \mapsto [f \circ c].$$

Wir setzen $Df(p) = Df|_{T_pM} : T_pM \to T_{f(p)}N$.

---

*Dabei kann $\varepsilon > 0$ von c abhängen, und die $\varphi \circ c_{1,2}$ müssen nur nahe bei $t = 0$ definiert sein.

Df bildet längs f ab, das heißt bezeichnet $\pi_M : TM \to M$ bzw. $\pi_N : TN \to N$ die kanonischen Projektionen, so gilt

$$\pi_N \circ Df = f \circ \pi_M. \tag{3.2}$$

Andere übliche Bezeichungen für das Differential sind f_*, df, Tf oder f'. Das Bild von $X \in T_pM$ unter der Abbildung $Df(p)$ schreiben wir in der Regel ohne Klammern in der Form $Df(p)X$ oder $Df \cdot X$. Wir werden auf T_pM und $T_{f(p)}N$ eine Vektorraumstruktur definieren, so dass $Df(p)$ eine lineare Abbildung ist; dies ist der Anlass für die Notation.

Lemma 3.1 *Das Differential Df einer Funktion $f \in C^1(M,N)$ ist wohldefiniert.*

Beweis: Für $p \in M$ seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von M bzw. N mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$. Dann folgt für eine C^1-Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$

$$(\psi \circ f \circ c)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)'(0) = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(\varphi \circ c)'(0). \tag{3.3}$$

Also folgt aus $c_1 \sim c_2$ auch $f \circ c_1 \sim f \circ c_2$, das heißt $Df \cdot [c]$ ist wohldefiniert. $\square$

Beispiel 3.2 Für eine Abbildung $f \in C^1(M,V)$ in eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ fassen wir das Differential $Df(p)$ als Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ auf, indem wir $T_{f(p)}V$ nach Beispiel 3.1 mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, das heißt

$$Df(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto (f \circ c)'(0).$$

Ist $f \in C^1(U,N)$ eine Abbildung von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ in eine Mannigfaltigkeit N, so fassen wir entsprechend das Differential auf als Abbildung

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \to T_{f(x)}N,\ v \mapsto [f \circ c_{x,v}] \quad \text{wobei } c_{x,v}(t) = x + tv.$$

Ist insbesondere $f \in C^1(U,V)$ mit offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$, so wird das Differential durch die Identifikationen $T_xU \cong \mathbb{R}^m$ und $T_{f(x)}V \cong \mathbb{R}^n$ zu der Abbildung

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto (f \circ c_{x,v})'(0) = Df(x)v,$$

wobei auf der rechten Seite die gewöhnliche mehrdimensionale Ableitung gemeint ist. Deshalb ist Definition 3.2 mit der gewohnten Notation für Funktionen mehrerer Veränderlicher konsistent. //

Eine unmittelbare Konsequenz von Definition 3.2 ist die Kettenregel:

Satz 3.1 *Seien M,N,P differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ist $f \in C^k(M,N)$ und $g \in C^k(N,P)$, so folgt $g \circ f \in C^k(M,P)$ und es gilt*

$$D(g \circ f) = Dg \cdot Df \quad \Leftrightarrow \quad D(g \circ f)(p) = Dg(f(p))Df(p) \text{ für alle } p \in M.$$

Beweis: Die Aussage $g \circ f \in C^k(M,P)$ wurde bereits in (2.1) gezeigt. Weiter gilt nach Definition des Differentials

$$D(g \circ f) \cdot [c] = [(g \circ f) \circ c] = Dg \cdot [f \circ c] = Dg \cdot Df \cdot [c].$$

Damit ist der Satz beweisen. $\square$

Satz 3.2 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte und $p \in U$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Die Abbildung $D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv.*

(ii) *Ist $\psi : V \to \psi(V)$ eine weitere Karte mit $p \in V$, so gilt*

$$D\psi(p) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\, D\varphi(p).$$

(iii) *Es gibt eine eindeutig bestimmte Vektorraumstruktur auf T_pM, so dass die Abbildung $D\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ linear (und damit isomorph) ist.*

Beweis: Die Injektivität von $D\varphi(p)$ folgt aus der Definition des Tangentialraums. Für die Surjektivität setze $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Zu gegebenem $v \in \mathbb{R}^n$ betrachte $c_{x,v}(t) = x + tv$, vgl. Gleichung 3.1, und berechne

$$D\varphi(p)[\varphi^{-1} \circ c_{x,v}] = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ c_{x,v})'(0) = v. \tag{3.4}$$

Damit ist Behauptung (i) gezeigt. Behauptung (ii) folgt unter Beachtung von Beispiel 3.2 aus Satz 3.1, der Kettenregel. Schließlich zeigen wir (iii). Zu $X, Y \in T_pM$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $Z \in T_pM$ mit

$$D\varphi(p)Z = \lambda\, D\varphi(p)X + \mu\, D\varphi(p)Y.$$

Eine Vektorraumstruktur wie in (iii) ist damit eindeutig bestimmt, und zwar muss gelten

$$\lambda X + \mu Y = D\varphi(p)^{-1}\,(\lambda\, D\varphi(p)X + \mu\, D\varphi(p)Y).$$

Umgekehrt folgt aus der Bijektivität von $D\varphi(p)$ leicht, dass durch die letzte Gleichung tatsächlich eine Vektorraumstruktur gegeben ist, und trivialerweise ist $D\varphi(p)$ bezüglich dieser Struktur linear. Ist nun $\psi : V \to \psi(V)$ eine andere Karte mit $p \in V$, so ist nach (ii) auch $D\psi(p) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))D\varphi(p)$ linear bzgl. der durch φ definierten Struktur, also stimmen die durch φ und ψ gegebenen Vektorraumstrukturen überein. □

Definition 3.3 *Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$, $x = \varphi(p)$, Karte auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 3.2 bilden dann die Vektoren*

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = D\varphi(p)^{-1} e_j$$

eine Basis von T_pM, die als Standardbasis bzgl. der Karte φ bezeichnet wird. Der Vektor $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ wird durch die Kurve $\varphi^{-1} \circ c_{\varphi(p),e_j}$ repräsentiert, wobei $c_{\varphi(p),e_j}(t) = \varphi(p) + te_j$.

Wir bezeichnen die Basisvektoren stets mit den Buchstaben der entsprechenden Koordinaten, zum Beispiel sind $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ die Basisvektoren zu den Polarkoordinaten r, θ, φ auf $\mathbb{R}^3$. Bei dieser Notation muss allerdings klar sein, bezüglich welcher Karte φ die Standardbasis gebildet wird. In Folgerung 3.2 wird erklärt, warum die Basisvektoren mit den Symbolen für die partiellen Ableitungen bezeichnet werden.

Beispiel 3.3 Ein C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen U, V im $\mathbb{R}^n$ kann als Karte aufgefasst werden. Setzen wir $f = \varphi^{-1}$, so lautet die zugehörige Standardbasis im Punkt $p \in U$ gemäß Definition 3.3

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = Df(\varphi(p))e_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(\varphi(p)).$$

Insbesondere erhalten wir für $f = \mathrm{id}_U$ die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$. Im allgemeinen werden die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ aber von p abhängen. Im Fall der Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) : x \geq 0,\, y = 0\}, \\ f(r,\theta,\varphi) &= (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta). \end{aligned}$$

Die Standardbasis bezüglich φ im Punkt $p = f(r,\theta,\varphi)$ lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(p) &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(p) &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(p) &= (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0). \end{aligned}$$

Als Funktion von $p = (x,y,z)$ erhalten wir für die Basis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(p) &= \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big), \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(p) &= \Big(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\Big), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(p) &= (-y, x, 0). \end{aligned}$$

//

Folgerung 3.1 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X \in T_pM$. Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte mit $p \in U$, so hat X die Koordinatendarstellung*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \quad \text{mit } X^i = D\varphi^i \cdot X. \tag{3.5}$$

Beweis: Da die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)$ eine Basis von T_pM bilden, gilt die Darstellung von X für geeignete $X^i \in \mathbb{R}$. Sei $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente. Dann gilt mit der Kettenregel $D\varphi^i = D(\pi^i \circ \varphi) = \pi^i \cdot D\varphi$, also erhalten wir aus Definition 3.3

$$\sum_{i=1}^{n} (D\varphi^i \cdot X)\, e_i = D\varphi \cdot X = D\varphi \cdot \big(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)\big) = \sum_{i=1}^{n} X^i\, e_i.$$

Durch Koeffizietenvergleich folgt die Behauptung. □

Satz 3.3 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und $f \in C^1(M,N)$. Dann ist die Abbildung $Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ linear. Sind $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi : V \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ Karten mit $p \in U$ und $f(U) \subset V$, so gilt*

$$D\psi(f(p))Df(p)(D\varphi(p))^{-1} = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)). \tag{3.6}$$

Bezeichnet $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, $j = 1, \ldots, m$, bzw. $\frac{\partial}{\partial y^i}(f(p))$, $i = 1, \ldots, n$, die Standardbasis von T_pM bzw. von $T_{f(p)}N$ bzgl. der Karten φ bzw. ψ, so lautet die zugehörige Matrixdarstellung des Differentials

$$Df(p) \cong \left(\frac{\partial(f^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right)(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \text{wobei } \psi \circ f = \sum_{i=1}^{n} f^i\, e_i. \tag{3.7}$$

Beweis: Die Formel (3.6) folgt aus Satz 3.1, der Kettenregel, in Verbindung mit Beispiel 3.2. Beachte insbesondere

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_U \quad \Rightarrow \quad D\varphi(p) D(\varphi^{-1})(\varphi(p)) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

Nun sind die Abbildungen $D\varphi(p)$ und $D\psi(f(p))$ nach Definition der jeweiligen Vektorraumstruktur Vektorraumisomorphismen, und die Abbildung $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ ist linear nach Beispiel 3.2. Damit ist auch die Abbildung $Df(p)$ linear. Für die Matrixdarstellung erhalten wir

$$\begin{aligned}
D\psi(f(p)) Df(p) \frac{\partial}{\partial x^j}(p) &= D\psi(f(p)) Df(p) D\varphi(p)^{-1} e_j \\
&= D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) e_i.
\end{aligned}$$

Dies beweist Behauptung (3.7). □

Beispiel 3.4 Wir betrachten hier eine C^1-Kurve $\gamma : I = (a, b) \to M$. Für $t_0 \in I$ wird der Basisvektor $\frac{\partial}{\partial t}(t_0)$ mit dem Basisvektor $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$ identifiziert, denn nach Definition 3.3 gilt mit $c(t) = t_0 + t$

$$\frac{\partial}{\partial t}(t_0) = [c] \mapsto c'(0) = 1 \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren den Tangentialvektor von γ in t_0 durch

$$\gamma'(t_0) := D\gamma(t_0) \frac{\partial}{\partial t}(t_0) = [\gamma \circ c] \in T_{\gamma(t_0)} M.$$

Diese Bezeichnung ist mit der üblichen Notation im $\mathbb{R}^n$ kompatibel, denn ist $\gamma \in C^1(I, V)$ mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so wird $[\gamma \circ c]$ mit dem Vektor $(\gamma \circ c)'(0) = \gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ identifiziert, vgl. Beispiel 3.1.

Ist wieder $\gamma \in C^1(I, M)$ mit M beliebig, so folgt im Fall $t_0 = 0$ aus der Definition $\gamma'(0) = [\gamma] \in T_{\gamma(0)} M$. Ab jetzt verwenden wir deshalb für Tangentialvektoren nur noch die Bezeichnung $\gamma'(t_0)$, auch wenn $t_0 = 0$. //

Beispiel 3.5 Sei N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Karte $g : W \to g(W)$ mit $p \in W$ gibt, so dass gilt:

$$g(M \cap W) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap g(W). \tag{3.8}$$

Eine Karte mit dieser Eigenschaft wollen wir M-adaptiert nennen. Die Menge M ist mit der induzierten Topologie ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Um einen Atlas zu definieren, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
\iota &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, & \iota(x^1, \ldots, x^m) &= (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0), \\
\pi &: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m, & \pi(y^1, \ldots, y^n) &= (y^1, \ldots, y^m).
\end{aligned}$$

Für eine M-adaptierte Karte $g : W \to g(W)$ setzen wir nun

$$\varphi_g : U_g := M \cap W \to \varphi_g(U_g),\ \varphi_g = \pi \circ g|_{M \cap W}.$$

Dann gilt $\varphi_g^{-1} = f \circ \iota|_{\varphi_g(U_g)}$, wobei $f = g^{-1} : g(W) \to W$ die Umkehrabbildung der Karte g bezeichnet. Insbesondere ergeben sich die Kartenwechsel

$$\begin{aligned} \varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1}|_{\varphi_g(U_g \cap U_{g'})} :\ & g(M \cap W \cap W') \to g'(M \cap W \cap W'), \\ \varphi_{g'} \circ \varphi_g^{-1} & = \pi \circ (g' \circ g^{-1}) \circ \iota|_{g(M \cap W \cap W')}. \end{aligned}$$

Somit ist auf M die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit induziert. Die Inklusionsabbildung $i : M \subset N$ ist bezüglich dieser Struktur differenzierbar, denn in den gegebenen Karten gilt

$$g \circ i \circ \varphi_g^{-1} = \iota|_{(\pi \circ g)(M \cap W)} \in C^\infty.$$

Aus der Gleichung $i = f \circ \iota \circ \varphi_g$ auf $M \cap W$ folgt $Di(p) = Df(g(p)\,\iota\, D\varphi_g(p)$ für $p \in M \cap W$ mit der Kettenregel. Somit ist die lineare Abbildung

$$Di(p) : T_pM \to \operatorname{Bild} Df(x,0)|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} \subset T_pN, \qquad \text{wobei } x = \varphi_g(p) = (\pi \circ g)(p),$$

ein Isomorphismus. Die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ bzgl. der Karte φ_g werden dabei mit den Vektoren $Df(x,0)(e_j,0)$, $j = 1, \ldots, m$, identifiziert, also mit den Tangentenvektoren der Parameterlinien $t \mapsto f(x + te_j, 0)$. //

Definition 3.4 *Die Richtungsableitung einer Funktion $f \in C^1(M)$ in Richtung des Tangentialvektors $X \in T_pM$ ist*

$$Xf := Df \cdot X = Df(p)X \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Alternative Bezeichungen sind $\partial_X f$ oder $D_X f$.

Folgerung 3.2 *Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $p \in U$. Die Richtungsableitung einer Funktion $f \in C^1(M)$ in Richtung von $X \in T_pM$ hat die Koordinatendarstellung*

$$Xf = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \text{ mit } X^j = D\varphi^j \cdot X = X\varphi^j \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)). \tag{3.10}$$

Spezialfälle sind $\frac{\partial}{\partial x^j}(p) f = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$ sowie $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)\varphi^i = \delta^i_j$.

Beweis: Aus Folgerung 3.1 und Satz 3.3 ergibt sich mit $X^j = D\varphi^j \cdot X = X\varphi^j$

$$Df \cdot X = \sum_{j=1}^n X^j\, Df \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{j=1}^n X^j\, \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)).$$

□

Das Symbol $\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$ hat die Eigenschaften einer partiellen Ableitung. Insbesondere gelten die Produktregel sowie die Vertauschbarkeit von iterierten Ableitungen, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) : &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big)(p) \\ &= \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \qquad \text{mit } g = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \circ \varphi \\ &= \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j}(\varphi(p)). \end{aligned}$$

Folgerung 3.3 *Seien $X, Y \in T_pM$ mit $Xf = Yf$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Dann folgt $X = Y$.*

Beweis: Wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Für $i = 1, \ldots, n$ gibt es Funktionen $\widetilde{\varphi}^i \in C^\infty(M)$ mit $\widetilde{\varphi}^i = \varphi^i$ nahe bei p; solche Funktionen konstruiert man leicht mit einer geeigneten Abschneidefunktion. Nach Definition 3.2 gilt dann $D\varphi^i(p) = D\widetilde{\varphi}^i(p)$, also gilt mit Folgerung 3.1

$$X^i = D\varphi^i(p)X = D\widetilde{\varphi}^i(p)X = X\widetilde{\varphi}^i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Folgerung 3.4 *Seien $\varphi : U \to \varphi(U)$, $x = \varphi(p)$, und $\psi : V \to \psi(V)$, $y = \psi(p)$, zwei Karten der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $p \in U \cap V$. Für $X \in T_pM$ bezeichne $X_\varphi \in \mathbb{R}^n$ bzw. $X_\psi \in \mathbb{R}^n$ die Koordinatenvektoren bezüglich der zugehörigen Basen $\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y^j}(p)$. Dann gilt*

$$X_\psi = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))X_\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(p)\, \frac{\partial}{\partial y^i}(p).$$

Beweis: Die erste Formel ergibt sich aus Satz 3.2(ii) (oder direkt aus der Kettenregel), denn

$$X_\psi = D\psi(p)X = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))D\varphi(p)X = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))X_\varphi.$$

Die zweite Formel folgt durch Anwendung auf $X = \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$, denn dann ist $X_\varphi = e_j$. □

An dieser Stelle wollen wir kurz den „physikalischen“ Zugang zur Definition der Tangentialvektoren andeuten. In der Regel wird in der Physik in geeigneten Koordinaten gerechnet, allerdings im Bewusstsein, dass sich die Objekte bei einem Wechsel der Koordinaten *richtig* transformieren müssen. Im Fall von Tangentialvektoren bedeutet *richtig* das Transformationsverhalten aus Folgerung 3.4, also mit der Jacobimatrix des Koordinatenwechsels. Durch Formalisierung dieser Idee gelangt man zu einer alternativen mathematischen Definition der Menge der Tangentialvektoren. Für einen Atlas $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, betrachtet man dazu

$$E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\lambda\} \times U_\lambda \times \mathbb{R}^n.$$

Die Menge der Tangentialvektoren wird als Quotient $E/\sim$ definiert, wobei

$$(\lambda, p, v) \sim (\mu, q, w) \quad \Leftrightarrow \quad q = p,\ w = D(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(p))v.$$

Es ist leicht zu sehen, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation ist. Wir erhalten wohldefinierte Abbildungen zwischen $E/\sim$ und dem von uns definierten Tangentialbündel wie folgt:

$$\begin{aligned}
&TM \to (E/\sim), && c'(0) \mapsto [(\lambda, c(0), (\varphi_\lambda \circ c)'(0)] && \text{für ein } \lambda \in \Lambda \text{ mit } c(0) \in U_\lambda,\\
&(E/\sim) \to TM, && [(\lambda, p, v)] \mapsto (\varphi_\lambda^{-1} \circ c_{\varphi_\lambda(p),v})'(0) && \text{wobei } c_{\varphi_\lambda(p),v}(t) = \varphi_\lambda(p) + tv.
\end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind bijektiv und zueinander invers; insbesondere hängt obige Konstruktion nicht von der Wahl des speziellen Atlas in der differenzierbaren Struktur ab.

4 Vektorfelder, Derivationen und Flüsse

Bis jetzt haben wir Vektoren in einem festen Tangentialraum T_pM betrachtet. Nun wollen wir den Standpunkt ändern und vektorwertige Funktionen studieren, genauer differenzierbare Vektorfelder. Da ein solches Vektorfeld eine Abbildung von M nach TM ist, brauchen wir zuvor eine differenzierbare Struktur auf TM. Diese ergibt sich aber zwangsläufig aus der differenzierbaren Struktur von M, wie wir jetzt zeigen.

Satz 4.1 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit maximalem Atlas $\mathcal{A}$ und Projektion $\pi : TM \to M$ auf den Fußpunkt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie auf TM, so dass die Abbildungen*

$$\varphi_\sharp : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,\ \varphi_\sharp(X) = ((\varphi \circ \pi)(X), D\varphi \cdot X) \quad (\varphi \in \mathcal{A}) \tag{4.1}$$

einen C^∞-Atlas bilden. Damit ist TM eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, und die Projektion $\pi : TM \to M$ ist in $C^\infty(TM, M)$.

Beweis: Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz 1.3 nach. Die Mengen $\pi^{-1}(U)$, wobei U Gebiet einer Karte $\varphi \in \mathcal{A}$, überdecken TM. Für zwei Karten $\varphi : U \to \varphi(U)$ und $\psi : V \to \psi(V)$ ist die Menge

$$\varphi_\sharp(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{2n}$. Weiter lautet der Kartenwechsel nach Satz 3.2(ii)

$$\begin{aligned} \psi_\sharp \circ (\varphi_\sharp)^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n &\to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n, \\ (\psi_\sharp \circ (\varphi_\sharp)^{-1})(x, v) &= \big((\psi \circ \varphi^{-1})(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})(x)v\big). \end{aligned}$$

Damit ist Satz 1.3 anwendbar und $\{\varphi_\sharp : \varphi \in \mathcal{A}\}$ ist ein C^∞-Atlas von TM. Die Projektion $\pi : TM \to M$ bildet in diesen Koordinaten wie folgt ab:

$$\varphi \circ \pi \circ (\varphi_\sharp)^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U),\ (x, v) \mapsto x,$$

π ist also von der Klasse C^∞. Für einen abzählbaren Atlas* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ ist $\{\varphi_\sharp : \varphi \in \mathcal{A}'\}$ abzählbarer Atlas von TM, und nach Satz 1.3 hat die Topologie auf TM eine abzählbare Basis.

Als letztes zeigen wir die Hausdorff-Eigenschaft. Seien $X, Y \in TM$ mit $X \neq Y$. Ist $\pi(X) \neq \pi(Y)$, so gibt es offene Umgebungen $U, V \subset M$ von $\pi(X)$ bzw. $\pi(Y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Die Mengen $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ sind dann disjunkte, offene Umgebungen von X bzw. Y. Im Fall $\pi(X) = \pi(Y) =: p$ wähle eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ mit $p \in U$. Es gibt dann offene Mengen $V, W \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_\sharp(X) \in V$, $\varphi_\sharp(Y) \in W$ und $V \cap W = \emptyset$. Also haben in diesem Fall die Mengen $(\varphi_\sharp)^{-1}(V)$ und $(\varphi_\sharp)^{-1}(W)$ die gewünschten Eigenschaften. □

Die im Anschluss an Definition 1.6 gemachte Bemerkung zur Konvergenz von Punkten in einer Mannigfaltigkeit besagt hier Folgendes:

Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte von M und $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pM$ mit $p \in U$. Eine Folge $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset TM$ konvergiert genau dann gegen X, wenn $p_k := \pi(X_k) \to p$ (insbesondere $p_k \in U$ für alle bis auf endlich viele k) und $(X_k)^i \to X^i$ mit $k \to \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dabei sind $(X_k)^1, \ldots, (X_k)^n$ die Koordinaten von X_k bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}(p_k), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p_k)$.

*Sei V_i, $i \in I$, abzählbare Basis der Topologie von M. Die V_i, die in einem Kartengebiet enthalten sind, überdecken M, also hat M einen abzählbaren Atlas.

Folgerung 4.1 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Ist $f \in C^k(M,N)$ mit $k \geq 1$, so ist $Df \in C^{k-1}(TM,TN)$.*

Beweis: Seien $\varphi : U \to \varphi(U)$ bzw. $\psi : V \to \psi(V)$ Karten von M bzw. N mit $f(U) \subset V$. Nach (3.2) gilt $Df(\pi_M^{-1}(U)) \subset \pi_N^{-1}(V)$, und es folgt für $x \in \varphi(U)$ und $v \in \mathbb{R}^m$ mit Satz 3.3

$$\psi_\sharp \circ Df \circ (\varphi_\sharp)^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \to \varphi(V) \times \mathbb{R}^n,\ (x,v) \mapsto \big((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)v\big).$$

Die Behauptung folgt. □

Definition 4.1 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\pi : TM \to M$ die Projektion auf den Fußpunkt.*

(i) *Eine Abbildung $X : M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ heißt Vektorfeld auf M.*

(ii) *X heißt C^k-Vektorfeld, wobei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, falls zusätzlich $X : M \to TM$ von der Klasse C^k ist.*

Wir bezeichnen den Raum der C^k-Vektorfelder mit $C^k(TM)$.

Bemerkung. Eine Verwechslung mit dem Raum der C^k-Funktionen auf TM sollte durch den Zusammenhang ausgeschlossen sein. $C^k(TM)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der offensichtlichen Vektorraumstruktur, vgl. Satz 3.2,

$$(\lambda X + \mu Y)(p) = \lambda X(p) + \mu Y(p).$$

Ferner können Vektorfelder mit Funktionen multipliziert werden:

$$f \in C^k(M),\ X \in C^k(TM) \quad \Rightarrow \quad fX \in C^k(TM),\ \text{wobei } (fX)(p) = f(p)X(p).$$

Definition 4.2 *Für ein Vektorfeld $X : M \to TM$ und eine Funktion $f \in C^1(M)$ setzen wir*

$$Xf : M \to \mathbb{R},\ Xf(p) = X(p)f = Df(p)X(p).$$

Definition 4.3 *Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$, $x = \varphi(p)$, eine Karte von M. Die zugehörigen Basisfelder sind definiert durch*

$$\frac{\partial}{\partial x^j} : U \to TU \subset TM,\ p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = D\varphi(p)^{-1}e_j.$$

Die folgende Aussage ist direkte Konsequenz von Folgerung 3.1.

Lemma 4.1 *Sei X ein Vektorfeld auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $\varphi : U \to \varphi(U)$, $x = \varphi(p)$, eine Karte von M. Dann gilt auf U die Darstellung*

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ \text{wobei } X^i = X\varphi^i : U \to \mathbb{R}.$$

Die X^i heißen Koordinatenfunktionen von X bzgl. der Karte φ.

Satz 4.2 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X : M \to TM$ ein Vektorfeld. Dann sind für $k \in \mathbb{N}_0$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X ist ein C^k-Vektorfeld, i.e. $X \in C^k(TM)$.*

(ii) *Für alle $f \in C^\infty(M)$ gilt $Xf \in C^k(M)$.*

(iii) *Für jede Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ sind die Koordinatenfunktionen $X^1, \ldots, X^n$ von X bzgl. φ von der Klasse $C^k(U)$.*

Beweis: Ist X ein C^k-Vektorfeld und $f \in C^\infty(M)$, so ist $Xf = Df \cdot X$ eine Verkettung der C^k-Abbildung $X : M \to TM$ mit der C^∞-Abbildung $Df : TM \to \mathbb{R}$, siehe Folgerung 4.1. Aus der Kettenregel folgt die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii).

Sei $\varphi^i : U \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktion einer Karte φ. Dann gibt es zu jedem $q \in U$ eine Funktion $\widetilde{\varphi}^i \in C^\infty(M)$, die in einer Umgebung von q mit φ^i übereinstimmt. Es folgt $X^i = X\varphi^i = X\widetilde{\varphi}^i$ in einer Umgebung von q. Unter der Annahme von (ii) ist somit X^i in C^k nahe bei q, also $X^i \in C^k(U)$.

Für (iii) $\Rightarrow$ (i) beachte, dass in einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ gilt:

$$\varphi_\sharp \circ X \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,\, x \mapsto (x, (X^1 \circ \varphi^{-1})(x), \ldots, (X^n \circ \varphi^{-1})(x)).$$

Aus (iii) folgt, dass diese Abbildung von der Klasse C^k ist, Nach Definition der differenzierbaren Struktur auf TM ist X dann C^k-Vektorfeld auf M. $\square$

Die „algebraische“Alternative zur Einführung von Tangentialvektoren beruht auf ihrer Interpretation als Richtungsableitungen. Jede Richtungsableitung operiert linear auf den glatten Funktionen und erfüllt außerdem eine Produktregel. Wir werden jetzt umgekehrt zeigen, dass die Richtungsableitungen durch diese beiden Bedingungen schon charakterisiert sind, das heißt eine lineare Abbildung von $C^\infty(M)$ nach $\mathbb{R}$, die die Produktregel erfüllt, ist nichts anderes als die Richtungsableitung bezüglich eines geeigneten Vektors. Die folgenden Ausführungen bis einschließlich Satz 4.3 werden im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht benötigt und können beim ersten Lesen übersprungen werden.

Definition 4.4 *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

(i) *Eine Derivation auf $C^\infty(M)$ ist eine lineare Abbildung $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, die folgende Produktregel erfüllt:*

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + f(\Delta g).$$

(ii) *Eine Derivation auf $C^\infty(M)$ in p ist eine lineare Abbildung $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, die folgende Produktregel erfüllt:*

$$\delta(fg) = (\delta f)g(p) + f(p)(\delta g).$$

Beispiel 4.1 Für $X \in T_pM$ ist die Richtungsableitung $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto Xf$, eine Derivation auf $C^\infty(M)$ in p. Dies folgt aus der Koordinatendarstellung (**??**). Entsprechend ist die Richtungsableitung nach einem Vektorfeld $X \in C^\infty(TM)$, aufgefasst als Abbildung $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto Xf$, eine Derivation auf $C^\infty(M)$. //

Lemma 4.2 *Sei δ eine Derivation auf $C^\infty(M)$ in $p \in M$, und U eine offene Umgebung von p. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Sind* $f, g \in C^\infty(M)$ *mit* $f = g$ *auf* U, *so folgt* $\delta f = \delta g$.

(ii) *Es gibt eine eindeutig bestimmte Derivation auf* $C^\infty(U)$ *in* p, *die ebenfalls mit* δ *bezeichnet wird, so dass* $\delta(f|_U) = \delta f$ *für alle* $f \in C^\infty(M)$.

Beweis: Zum Beweis von (i) reicht es wegen der Linearität von v zu zeigen, dass gilt:

$$f|_U = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta f = 0.$$

Wähle eine Abschneidefunktion $\eta \in C^\infty(M)$, so dass $\overline{\{q \in M : \eta(q) \neq 1\}}$ kompakte Teilmenge von U und $\eta \equiv 0$ nahe bei p. Eine solche Funktion konstruiert man leicht mithilfe einer Karte bei p. Es folgt $\eta f = f$ auf ganz M, also

$$\delta f = \delta(\eta f) = (\delta\eta) f(p) + \eta(p)(\delta f) = 0.$$

Um in (ii) die Existenz zu zeigen, definieren wir $\delta f := \delta\widetilde{f}$ für $f \in C^\infty(U)$, wobei $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$ mit $\widetilde{f} = f$ nahe bei p. Die Definition hängt wegen (i) nicht von der Wahl von $\widetilde{f}$ ab. Insbesondere ist $\delta : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ linear und wegen (i) gilt für $f, g \in C^\infty(U)$

$$\delta(fg) = \delta(\widetilde{f}\,\widetilde{g}) = (\delta\widetilde{f})\,\widetilde{g}(p) + \widetilde{f}(p)\,(\delta\widetilde{g}) = (\delta f)\,g(p) + f(p)\,(\delta g),$$

das heißt δ ist Derivation auf $C^\infty(U)$ in p. Ferner folgt $\delta(f|_U) = \delta f$ für $f \in C^\infty(M)$ aus der Definition.

Sei schließlich ε eine beliebige Derivation auf $C^\infty(U)$ in p mit der Eigenschaft aus (ii). Dann folgt für $f \in C^\infty(U)$

$$\varepsilon f = \varepsilon(\widetilde{f}|_U) = \delta\widetilde{f} = \delta f.$$

Somit ist die Derivation in (ii) eindeutig bestimmt. □

Lemma 4.3 *Sei* $u \in C^\infty(B_r(0))$, *wobei* $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. *Dann gibt es Funktionen* $u_j \in C^\infty(B_r(0))$, *so dass gilt:*

$$u(x) = u(0) + \sum_{j=1}^n x^j\,u_j(x) \qquad \text{für alle } x \in B_r(0).$$

Insbesondere gilt $u_j(0) = \dfrac{\partial u}{\partial x^j}(0)$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Gleichung

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\,u(tx)\,dt = \sum_{j=1}^n x^j \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x^j}(tx)\,dt}_{=:\,u_j(x)}.$$

□

Satz 4.3 *Sei* M *eine* n*-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(i) *Zu jeder Derivation* $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ *in* $p \in M$ *gibt es genau ein* $X \in T_pM$ *mit* $\delta f = Xf$ *für alle* $f \in C^\infty(M)$.

(ii) *Zu jeder Derivation $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ gibt es genau ein Vektorfeld $X \in C^\infty(TM)$ mit $\Delta f = Xf$ für alle $f \in C^\infty(M)$.*

Beweis: Sei $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte mit $p \in M$. Ist $X \in T_pM$ mit $Xf = \delta f$ für alle $f \in C^\infty(M)$, so folgt $X\varphi^j = \delta\varphi^j$ aus Lemma 4.2(ii), also mit (3.5)

$$X = \sum_{j=1}^n (X\varphi^j)\frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \sum_{j=1}^n (\delta\varphi^j)\frac{\partial}{\partial x^j}(p). \tag{4.2}$$

Insbesondere ist der gesuchte Tangentialvektor in (i) eindeutig bestimmt. Umgekehrt zeigen wir: ist $X \in T_pM$ durch die rechte Seite von (4.2) definiert, so folgt $Xf = \delta f$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Zunächst gilt für $f_c : M \to \mathbb{R}$, $f_c(x) \equiv c$ mit $c \in \mathbb{R}$,

$$\delta f_1 = \delta(f_1 f_1) = 2\,\delta f_1 \quad \Rightarrow \quad \delta f_c = c\,\delta f_1 = 0.$$

Wähle nun eine Karte φ, so dass $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(U) = B_r(0)$. Mit $v_j := u_j \circ \varphi \in C^\infty(U)$ gilt

$$v_j(p) = u_j(0) = \frac{\partial u}{\partial x^j}(0) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p),$$

und weiter

$$\delta f = \delta\big(f(p) + \sum_{j=1}^n \varphi^j v_j\big) = \sum_{j=1}^n (\delta\varphi^j)v_j(p) = \sum_{j=1}^n (\delta\varphi^j)\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = Xf.$$

Damit ist Behauptung (i) bewiesen. Für eine gegebene Derivation $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ und jedes $p \in M$ ist nun $\delta_p f := (\Delta f)(p)$ eine Derivation in p, wie man leicht sieht. Nach Behauptung (i) gibt es dann genau ein $X(p) \in T_pM$ mit $X(p)f = (\Delta f)(p)$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ eine Karte und sind $\widetilde{\varphi}^j \in C^\infty(M)$ mit $\widetilde{\varphi}^j = \varphi^j$ auf einer Umgebung $V \subset U$ von p, so folgt aus (4.2) und dem Beweis von Lemma 4.2 die Darstellung

$$X(q) = \sum_{j=1}^n (\delta_q\varphi^j)\,\frac{\partial}{\partial x^j}(q) = \sum_{j=1}^n (\Delta\widetilde{\varphi}^j)(q)\,\frac{\partial}{\partial x^j}(q) \text{ für alle } q \in V.$$

Also ist X ein glattes Vektorfeld, was noch zu zeigen war. $\square$

Definition 4.5 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (evtl. uneigentliches) Intervall. Eine Kurve $c : I \to M$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes $X : M \to TM$, falls $c \in C^1(I, M)$ und falls gilt:*

$$c' = X \circ c \quad \Leftrightarrow \quad c'(t) = X(c(t)) \text{ für alle } t \in I. \tag{4.3}$$

c heißt maximale Integralkurve, wenn es keine Integralkurve $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to M$ gibt mit $I \overset{\neq}{\subset} \widetilde{I}$ und $\widetilde{c}|_I = c$. Eine Kurve $c : I \to M$ heißt Lösung des Anfangswertproblems für X zum Anfangswert $p \in M$, falls

$$c' = X \circ c, \quad c(0) = p.$$

Genauer könnte man auch die Begriffe rechts- bzw. linksseitig maximal erklären. Wir interessieren uns nun zuerst dafür, wie sich die Gleichung in lokale Koordinaten übersetzt. Betrachte dazu etwas allgemeiner folgende Situation:

Definition 4.6 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \in C^1(M,N)$. Das Vektorfeld $Y : N \to TN$ heißt f-verwandt zu dem Vektorfeld $X : M \to TM$, wenn gilt:*

$$Y \circ f = Df \cdot X \quad \Leftrightarrow \quad Y(f(p)) = Df(p)X(p) \text{ für alle } p \in M.$$

Lemma 4.4 *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f \in C^1(M,N)$. Das Vektorfeld $Y : N \to TN$ sei f-verwandt zu $X : M \to TM$. Ist dann $c : I \to M$ Integralkurve von X, so ist $f \circ c : I \to N$ Integralkurve von Y.*

Beweis: $(f \circ c)' = Df \cdot c' = Df \cdot (X \circ c) = Y \circ (f \circ c)$. □

Zu gegebenem X und f muss kein f-verwandtes Feld Y existieren, zum Beispiel kann es Punkte $p_{1,2} \in M$ geben mit $f(p_1) = f(p_2)$, aber $Df(p_1)X(p_1) \neq Df(p_2)X(p_2)$. Auch ist ein f-verwandtes Feld nicht eindeutig bestimmt, es sei denn, f ist surjektiv. Ist $f \in C^1(M,N)$ aber ein Diffeomorphismus, so gibt es genau ein f-verwandtes Feld, nämlich den pushforward von X unter f.

Definition 4.7 *Sei $f \in C^1(M,N)$ ein Diffeomorphismus zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N. Für ein Vektorfeld $X : M \to TM$ ist das eindeutig bestimmte, f-verwandte Feld $Y : N \to TN$ gegeben durch*

$$Y = Df \cdot (X \circ f^{-1}) \quad \Leftrightarrow \quad Y(q) = Df(f^{-1}(q))X(f^{-1}(q)),$$

und heißt pushforward f_*X von X unter f. Für $f \in C^{k+1}(M,N)$ und $X \in C^k(TM)$ ist f_*X in $C^k(TN)$.

Sind $f \in C^1(M,N)$ und $g \in C^1(N,P)$ diffeomorph, so folgt für ein Vektorfeld $X : M \to TM$ aus der Kettenregel

$$(g \circ f)_*X = D(g \circ f) \cdot \big(X \circ (g \circ f)^{-1}\big) = Dg \cdot \big((Df \cdot (X \circ f^{-1})) \circ g^{-1}\big) = g_*(f_*X). \tag{4.4}$$

Lemma 4.5 *Sei $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(p)$, eine Karte von M und $X : M \to TM$ ein Vektorfeld mit lokaler Darstellung $X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Dann ist der pushforward von X unter φ gegeben durch*

$$\xi : V \to \mathbb{R}^n,\ \xi(x) = \big((X^1 \circ \varphi^{-1})(x), \ldots, (X^n \circ \varphi^{-1})(x)\big).$$

$c : I \to U$ ist genau dann Integralkurve von X, wenn $\gamma = \varphi \circ c : I \to V$ Integralkurve des Vektorfelds $\xi = \varphi_*X$ ist.

Beweis: Nach Definition des pushforward und Definition 4.3 gilt

$$\varphi_*X = D\varphi \cdot (X \circ \varphi^{-1}) = \sum_{j=1}^n (X^j \circ \varphi^{-1})\, D\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^n \xi^j\, e_j.$$

Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 4.4, wobei für die Rückrichtung benutzt wird, dass $X = (\varphi^{-1})_*(\varphi_*X) = (\varphi^{-1})_*\xi$ nach (4.4). □

Die Gleichung (4.3) für Integralkurven ist also lokal ein autonomes System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die relevante Theorie im $\mathbb{R}^n$ liefert in Verbindung mit Lemma 4.5 folgende Aussagen zur Eindeutigkeit, Existenz und differenzierbaren Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert:

Satz 4.4 *Sei $X \in C^1(TM)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Sind $c_k : I_k \to M$ Integralkurven von X mit $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gilt $c_1 = c_2$ auf $I_1 \cap I_2$ und die zusammengesetzte Kurve*

$$c : I_1 \cup I_2 \to M,\ c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{für } t \in I_1 \\ c_2(t) & \text{für } t \in I_2 \end{cases}$$

ist wieder eine Integralkurve von X.

(ii) *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem $c' = X \circ c$, $c(0) = q$, für alle $q \in U$ eine Lösung $c_q : (-\delta, \delta) \to M$ hat.*

(iii) *Ist $X \in C^k(TM)$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist die Abbildung $\Phi : U \times (-\delta, \delta) \to M, \Phi(q,t) = c_q(t)$, von der Klasse C^k.*

Beweis: Für (i) betrachte die Menge $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$. Nach Definition ist J abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$ und nach Voraussetzung nicht leer, da $t_0 \in J$. Aber J ist auch offen in $I_1 \cap I_2$; dies folgt durch Anwendung des Eindeutigkeitssatzes im $\mathbb{R}^n$ in einer lokalen Karte gemäß Lemma 4.5. Also gilt $J = I_1 \cap I_2$, das heißt die Lösungen stimmen auf $I_1 \cap I_2$ überein. Die Lösungseigenschaft der zusammengesetzten Kurve ist offensichtlich. Die Behauptungen (ii) und (iii) sind direkte Konsequenzen der entsprechenden Aussagen im $\mathbb{R}^n$ zusammen mit Lemma 4.5. □

Es ist nicht unwesentlich, dass das Lösungsintervall in Satz 4.4(ii) lokal gleichmäßig gewählt werden kann. Dies ist Konsequenz der Tatsache, dass im $\mathbb{R}^n$ die Größe des Intervalls nur von der C^1-Norm des Vektorfelds auf einer Kugel $B_\varrho(x_0) \subset V$, und vom Radius dieser Kugel, abhängt.
Ist nur $X \in C^0(TM)$, so gilt das Eindeutigkeitsresultat im allgemeinen nicht. Betrachte dazu die Gleichung $\gamma' = \sqrt{|\gamma|}$ für $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gibt eine Schar von C^1-Lösungen mit $\gamma(0) = 0$, die von zwei Parametern $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$ abhängt:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - t_1)^2 & t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{1}{4}(t - t_2)^2 & t \geq t_2. \end{cases}$$

Ein Beispiel dafür, dass die Integralkurven nicht immer auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden können, liefert die Gleichung $\gamma' = \gamma^2$. Die maximale Integralkurve mit $\gamma(0) = x_0 \neq 0$ lautet

$$\gamma(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \text{ mit } \begin{cases} t \in (-\infty, \frac{1}{x_0}) & \text{falls } x_0 > 0, \\ t \in (\frac{1}{x_0}, \infty) & \text{falls } x_0 < 0. \end{cases}$$

Folgerung 4.2 *Sei $X \in C^1(TM)$. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine maximale Integralkurve $c_p : I_p \to M$ von X mit $c_p(0) = p$, und es gilt:*

(i) *$I_p = (\alpha_p, \omega_p)$ ist ein offenes Intervall mit $-\infty \leq \alpha_p < 0 < \omega_p \leq \infty$.*

(ii) *Ist $c : I \to M$ Integralkurve von X mit $c(0) = p$, so gilt $I \subset I_p$ und $c = c_p|_I$.*

(iii) *Zu $K \subset M$ kompakt gibt es ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset (\alpha_p, \omega_p)$ für alle $p \in K$.*

Beweis: Wir setzen

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \inf\{a < 0: \text{ es gibt eine Integralkurve } c : (a, 0] \to M \text{ mit } c(0) = p\},\\ \omega_p &= \sup\{b > 0: \text{ es gibt eine Integralkurve } c : [0, b) \to M \text{ mit } c(0) = p\}.\end{aligned}$$

Nach Satz 4.4(ii) gilt $\alpha_p < 0 < \omega_p$, und mit Satz 4.4(i) erhalten wir eine wohldefinierte Lösung $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \to M$ des Anfangswertproblems. Wäre c_p zum Beispiel auf $(\alpha_p, \omega_p]$ fortsetzbar, so gibt es nach Satz 4.4(ii) für geeignetes $\delta > 0$ eine Integralkurve $c : (\omega_p - \delta, \omega_p + \delta) \to M$ mit $c(\omega_p) = c_p(\omega_p)$, und wir erhalten eine Fortsetzung von c_p auf das Intervall $(\alpha_p, \omega_p + \delta)$ im Widerspruch zur Definition von ω_p. Also ist $c_p : I_p = (\alpha_p, \omega_p) \to M$ maximale Integralkurve. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus Satz 4.4(i) und der Maximalität. Schließlich ergibt sich Behauptung (iii) aus Satz 4.4(iii) mit einem Überdeckungsargument. □

Folgerung 4.3 *Sei $c_p : (\alpha_p, \omega_p) \to M$ die maximale Integralkurve von $X \in C^1(TM)$ mit Anfangswert $c_p(0) = p$. Gilt dann $\omega_p < \infty$ (bzw. $\alpha_p > -\infty$), so gibt es zu $K \subset M$ kompakt ein $t^K < \omega_p$ (bzw. $t_K > \alpha_p$), so dass gilt:*

$$c_p(t) \notin K \text{ für alle } t > t^K \quad (\text{ bzw. } c_p(t) \notin K \text{ für alle } t < t_K).$$

Hat X kompakten Träger auf M, so gilt $(\alpha_p, \omega_p) = (-\infty, \infty)$.

Bemerkung. Vektorfelder, deren Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, nennt man vollständig integrierbar.

Beweis: Sei $\omega_p < \infty$. Dann gilt $\omega_{c_p(t)} = \omega_p - t \searrow 0$ mit $t \nearrow \omega_p$. Wegen Folgerung 4.2(iii) gilt $c_p(t) \notin K$ für t hinreichend groß. Wäre $\omega_p < \infty$ im Fall $K := \operatorname{spt} X$ kompakt, so folgt $c_p(t) \notin K$ für $t > t_K$, also $c_p'(t) = X(c_p(t)) = 0$ für $t > t^K$. Aber dann ist $c_p(t)$ konstant für $t > t^K$, und wir können die Lösung konstant auf (t^K, ∞) fortsetzen, im Widerspruch zur Annahme. □

Ab jetzt nehmen wir einen etwas anderen Standpunkt ein und betrachten die Integralkurve c_p in Abhängigkeit von ihrem Anfangswert p.

Definition 4.8 *Für $X \in C^1(TM)$ bezeichne $c_p : I_p \to M$ die maximale Integralkurve mit $c_p(0) = p$, und $M^X = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times I_p \subset M \times \mathbb{R}$. Der Fluss von X ist die Abbildung*

$$\Phi : M^X \to M,\ \Phi(p, t) = c_p(t).$$

Wir setzen $M_t^X = \{p \in M : t \in I_p\}$ und $\Phi_t : M_t^X \to M$, $\Phi_t(p) = c_p(t)$.

Lemma 4.6 *Sei $X \in C^1(TM)$ mit Fluss $\Phi : M^X \to M$ und maximalen Existenzintervallen I_p für $p \in M$. Ist $Y = f_* X$ der pushforward von X unter einem Diffeomorphismus $f \in C^2(M, N)$, so ist der Fluss von Y gegeben durch*

$$\Psi : N^Y = \bigcup_{q \in N} \{q\} \times I_{f^{-1}(q)} \to N,\ \Psi(t, y) = f(\Phi(f^{-1}(x), t)).$$

Beweis: Dies ist offensichtliche Konsequenz von Lemma 4.5. □

Lemma 4.7 *Für den Fluss $\Phi_t : M_t^X \to M$ von $X \in C^1(TM)$ gilt $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und*

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t} \text{ auf } M_t^X \cap M_{s+t}^X. \tag{4.5}$$

Beweis: Haben $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dasselbe Vorzeichen, so gilt $M_{t_2}^X \subset M_{t_1}^X$ für $|t_1| \leq |t_2|$. Setze $I = [0,s]$ bzw. $I = [s,0]$ je nach Vorzeichen von s. Für $\sigma \in I$ liegt $\sigma + t$ zwischen t und $s+t$, also ist für $p \in M_t^X \cap M_{s+t}^X$ die C^1-Kurve $c : I \to M$, $c(\sigma) = c_p(\sigma + t)$ wohldefiniert, und es gilt

$$c'(\sigma) = c_p'(\sigma + t) = X(c_p(\sigma + t)) = X(c(\sigma)), \quad c(0) = c_p(t).$$

Nach Definition folgt $\Phi_t(p) \in M_s^X$ und $\Phi_s(\Phi_t(p)) = c_{c_p(t)}(s) = c_p(s+t) = \Phi_{s+t}(p)$. □

Folgerung 4.4 *Sei $X \in C^k(TM)$. Der Fluss $\Phi : M^X \to M$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) *Die Mengen $M^X \subset M \times \mathbb{R}$ sowie $M_t^X \subset M$ sind offen.*

(ii) *$\Phi : M^X \to M$ ist von der Klasse C^k.*

(iii) *$\Phi_t : M_t^X \to M_{-t}^X$ ist ein C^k-Diffeomorphismus.*

Beweis: Sei G die Menge aller Punkte $(p,t) \in \Omega$, für die eine offene Umgebung $W \subset M \times \mathbb{R}$ existiert mit $W \subset M^X$ und $\Phi|_W \in C^k(W, M)$. Wir zeigen $G = M^X$ und damit die Behauptungen (i) und (ii).

Zu $p \in M$ gibt es nach Satz 4.4(iii) eine offene Umgebung U_p und ein $\delta_p > 0$ mit $U_p \times (-\delta_p, \delta_p) \subset G$. Sei $(p,T) \in M^X$ gegeben mit $T > 0$; der Fall $T < 0$ ist analog. Da $c_p([0,T])$ kompakt, gibt es ein $\delta > 0$ und eine offene Menge $U \subset M$ mit $c_p([0,T]) \subset U$, so dass $U \times (-\delta, \delta) \subset G$. Wir behaupten, dass für $t \in [0,T]$ folgende Implikation gilt:

$$\{p\} \times [0,t) \subset G \quad \Rightarrow \quad \{p\} \times [0,t') \subset G \text{ für alle } t' \in (t, t+\delta).$$

Zunächst gibt es wegen $t' - \delta < t$ eine offene Umgebung V von p mit $V \times \{t' - \delta\} \subset G$, also $\Phi_{t'-\delta}|_V \in C^k(V, M)$. Da $\Phi_{t'-\delta}(p) = c_p(t' - \delta) \in U$, können wir nach Verkleinerung von V annehmen, dass $\Phi_{t'-\delta}(V) \subset U$. Für $s \in [t' - \delta, t')$ gilt $0 \leq s - t' + \delta < \delta$, so dass insgesamt die folgende Abbildung wohldefiniert und von der Klasse C^k ist:

$$\Psi : V \times [t' - \delta, t') \to M, \; \Psi(q,s) = \Phi(\Phi_{t'-\delta}(q), s - t' + \delta).$$

Nun ist $\Psi(q, \cdot)$ Integralkurve mit $\Psi(q, t' - \delta) = \Phi(q, t' - \delta)$. Es folgt $V \times [t' - \delta, t') \subset M^X$ und $\Phi = \Psi$ auf $V \times [t' - \delta, t')$, also $\{p\} \times [t, t') \subset G$. Somit gilt $(p,T) \in G$ bzw. $G = M^X$, was zu zeigen war. Nach Lemma 4.7 gilt $\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \mathrm{id}$ auf M_t^X für $t \in \mathbb{R}$, woraus sich Behauptung (iii) ergibt. □

Ist das Vektorfeld $X \in C^1(TM)$ vollständig integrierbar, das heißt alle Flusskurven sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so liefert der Fluss eine Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}\,(M), \; t \mapsto \Phi_t, \qquad \text{mit } \Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}.$$

Diese Abbildung nennt man die von X erzeugte Einparametergruppe von Diffeomorphismen von M.

Satz 4.5 *Seien $X, Y \in C^k(TM)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes C^{k-1}-Vektorfeld, die Lieklammer $[X, Y]$ von X und Y, so dass gilt:*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \text{für alle } f \in C^\infty(M). \tag{4.6}$$

Bezüglich einer Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ hat $[X,Y]$ die Koordinatendarstellung

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\big) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{4.7}$$

Beweis: Wir berechnen bzgl. einer lokalen Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$

$$X(Yf) = \sum_{i,j=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\big) = \sum_{i,j=1}^{n} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Nach dem Satz von Schwarz heben sich die zweiten Ableitungen bei Vertauschung und Subtraktion weg, und es folgt

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^{n} \big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\big) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Wir definieren nun das Vektorfeld $[X, Y]$ auf U durch (4.7). Dann ist $[X, Y] \in C^{k-1}(TU)$ wohldefiniert und hat auf U die gewünschte Eigenschaft (4.6). Aber ein Vektorfeld ist durch (4.6) punktweise eindeutig bestimmt, vgl. Folgerung 3.3. Deshalb stimmen die Definitionen auf den Überlappungsgebieten der einzelnen Karten überein, und wir erhalten ein wohldefiniertes C^{k-1}-Vektorfeld auf ganz M. □

Lemma 4.8 *Für Vektorfelder $X, Y, Z \in C^k(TM)$ mit $k \geq 1$ gilt:*

(i) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Y] + \mu[Y, Z]$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) $[X, Y] = -[Y, X]$.

(iii) $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0$, *falls* $k \geq 2$.

(iii) *Für die Basisfelder einer Karte ist* $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

Beweis: Die Aussagen folgen aus der Definition. Für (iii) berechnen wir mit $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \big[[X,Y],Z\big]f &= [X,Y]\,Zf - Z\,[X,Y]f \\ &= \underbrace{XYZf}_{\text{zyklisch}} - \underbrace{YXZf}_{\text{antizyklisch}} - \underbrace{ZXYf}_{\text{zyklisch}} + \underbrace{ZYXf}_{\text{antizyklisch}}. \end{aligned}$$

Also heben sich bei zyklischer Vertauschung und Addition alle Terme weg. Behauptung (iv) folgt aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. □

Bemerkung. Die Lieklammer ist nicht bilinear über $C^\infty(M)$, sondern es gilt

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y \quad \text{bzw.} \quad [fX, Y] = f\,[X, Y] - (Yf)\,X. \tag{4.8}$$

Was ist nun die geometrische Bedeutung der Lieklammer? Wir wollen zeigen, dass das Verschwinden der Lieklammer von zwei Vektorfeldern X, Y – man spricht dann von kommutierenden Vektorfeldern – gleichbedeutend damit ist, dass die zugehörigen Flüsse der Vektorfelder kommutieren. Dazu zunächst folgendes Lemma.

Lemma 4.9 *Sei $f \in C^2(M,N)$ Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Die Vektorfelder $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in C^1(TN)$ seien f-verwandt zu den Vektorfeldern $X, Y \in C^1(TM)$, das heißt $Df \cdot X = \widetilde{X} \circ f$ und $Df \cdot Y = \widetilde{Y} \circ f$. Dann ist auch $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ f-verwandt zu $[X,Y]$:*

$$Df \cdot [X,Y] = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \circ f.$$

Beweis: Der Beweis geschieht durch konsequentes Anwenden der Definitionen. Wir berechenen für $g \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned}
Dg \cdot Df \cdot [X,Y] &= D(g \circ f) \cdot [X,Y] \\
&= (XY - YX)(g \circ f) \\
&= X(Dg \cdot Df \cdot Y) - Y(Dg \cdot Df \cdot X) \\
&= X(Dg \cdot (\widetilde{Y} \circ f)) - Y(Dg \cdot (\widetilde{X} \circ f)) \\
&= X((\widetilde{Y} g) \circ f) - Y((\widetilde{X} g) \circ f) \\
&= D(\widetilde{Y} g) \cdot Df \cdot X - D(\widetilde{X} g) \cdot Df \cdot Y \\
&= (\widetilde{X}(\widetilde{Y} g)) \circ f - (\widetilde{Y}(\widetilde{X} g)) \circ f \\
&= Dg \cdot [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \circ f.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Satz 4.6 *Seien $X, Y \in C^2(TM)$ und $\Phi : M^X \to M$ der Fluss von X. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((\Phi_t)_* Y\big)(p)|_{t=0} = -[X,Y](p). \tag{4.9}$$

Beweis: Sei zuerst $M = V$ offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $x \in V$. Da $\Phi \in C^2$ in einer Umgebung von $(x,0)$ nach Satz 4.4(iii), erhalten wir aus $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(y,0) = X(y)$ sowie aus $\Phi_0 = \mathrm{id}$ bzw. $D\Phi_0(x) = \mathrm{Id}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} D\Phi_t(\Phi_{-t}(x)) Y(\Phi_{-t}(x))|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\Phi\big(\Phi_{-t}(x) + s\,Y(\Phi_{-t}(x)), t\big)|_{s,t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\big(-D\Phi_0(x)(X(x) + sDY(x)X(x)) + X(x + s\,Y(x))\big)|_{s=0} \\
&= -DY(x)X(x) + DX(x)Y(x) \\
&= -[X,Y](x).
\end{aligned}$$

Dabei wurde zuletzt die Koordinatendarstellung (4.7) der Lieklammer eingesetzt.

In einer beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist die Ableitung einer Kurve in TM im allgemeinen nur als Element von $T(TM)$ erklärt. Aber in (4.9) verläuft die Kurve

$$t \mapsto \big((\Phi_t)_* Y\big)(p) = D\Phi_t(\Phi_{-t}(p)) Y(\Phi_{-t}(p))$$

in dem festen, endlichdimensionalen Vektorraum T_pM, der die Standardtopologie trägt. Konvergenz in T_pM bedeutet Konvergenz der Koordinaten bezüglich einer Basis (vgl. die Bemerkung nach Satz 4.1). Entsprechend ist die Ableitung als Element von T_pM definiert. Diese berechnet sich durch Differentiation der Koordinaten bezüglich einer Basis von T_pM.

Wähle nun eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 4.6 ist die C^2-Abbildung

$$\Psi : V \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n\,,\ \Psi(y,t) = \varphi(\Phi(\varphi^{-1}(y),t))$$

der (lokal definierte) Fluss von $\varphi_* X$, wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ geeignete Umgebung von $x = \varphi(p)$ und $\delta > 0$ hinreichend klein. Außerdem ist der Koordinatenvektor $Z^\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eines Vektorfelds Z gegeben durch $Z^\varphi = (\varphi_* Z) \circ \varphi$, nach Lemma 4.5. Mit (4.4) folgt auf V

$$\big((\Phi_t)_* Y\big)^\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi_*\big((\Phi_t)_* Y\big) = (\varphi \circ \Phi_t \circ \varphi^{-1})_* \,\varphi_* \,Y = (\Psi_t)_* \,\varphi_* \,Y.$$

Damit erhalten wir aus dem Fall $M = V \subset \mathbb{R}^n$ und Lemma 4.9

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\big((\Phi_t)_* Y\big)^\varphi(p)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}(\Psi_t)_*(\varphi_* Y)(x)|_{t=0}\\
&= -[\varphi_* X, \varphi_* Y](x)\\
&= -\varphi_*[X,Y](x)\\
&= -[X,Y]^\varphi(p),
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist allgemein bewiesen. □

Der Einfachheit halber setzen wir in der nachstehenden Aussage voraus, dass die Flüsse global definiert sind.

Folgerung 4.5 *Die Vektorfelder $X, Y \in C^2(TM)$ seien vollständig integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $[X,Y] = 0$ *auf* M.

(i) $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$, *wobei* Φ_s, Ψ_t *die Flüsse von* X *bzw.* Y *sind.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$. Und zwar folgt für $p \in M$ durch sukzessive Anwendung von $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$ und $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$, wobei Satz 4.6 benutzt wird:

$$\begin{aligned}
& (\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t})(p) &= \Psi_s(p)\\
\Rightarrow\ & D\Phi_t \cdot Y(\Phi_{-t}(p)) &= Y(p)\\
\Rightarrow\ & -[X,Y](p) &= 0.
\end{aligned}$$

Umgekehrt berechnen wir mit $\Phi_{t_0+s} = \Phi_{t_0} \circ \Phi_s$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\big((\Phi_t)_* Y\big)(p)|_{t=t_0} &= \frac{\partial}{\partial s}\big((\Phi_{t_0+s})_* Y\big)(p)|_{s=0}\\
&= (\Phi_{t_0})_* \frac{\partial}{\partial s}(\Phi_s)_* Y(p)|_{s=0}\\
&= -(\Phi_{t_0})_*[X,Y](p)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $D\Phi_t \cdot Y(\Phi_{-t}(p)) = Y(p)$ für alle $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$. Für $c(s) := (\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t})(p)$ folgt

$$c'(s) = D\Phi_t \cdot Y((\Psi_s \circ \Phi_{-t})(p)) = D\Phi_t \cdot Y(\Phi_{-t}((\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_{-t})(p))) = Y(c(s)),$$

sowie natürlich $c(0) = p$. Die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems (Satz 4.4(i)) liefert $c(s) = \Psi_s(p)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, und folglich

$$\Phi_t \circ \Psi_s \circ \Phi_t^{-1} = \Psi_s \quad \text{für alle } s,t \in \mathbb{R}.$$

□

Bemerkungen zur Literatur

Hier einige Bücher, die mir bekannt sind. Es gibt diverse weitere Titel, darunter sicher viele gute, interessante Darstellungen des Stoffs. Die Vorlesung wird sich nicht speziell nach einem Buch richten.

Literatur

[1] Gallot, S., Hulot, D. und Lafontaine, J.: *Riemannian Geometry*, 2. Auflage, Springer Universitext 1990.
Viel Material in guter Darstellung, zum Teil etwas knapp. Preis 30 Euro.

[2] Jost, J.: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 3. Auflage, Springer Universitext 2002.
Knapp gehaltene Darstellung der Grundlagen, aber viele Anwendungen und Ausblicke mit Schwerpunkt Analysis. Preis 50 Euro.

[3] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I-V*, 3. Auflage, Publish of Perish 1999.
Für die Vorlesung ist der Stoff der Bände I, II und evtl. III relevant. Anregend geschrieben, mit viel Text. Preis für I, II, III zusammen etwa $120.

[4] do Carmo, M.: *Riemannian Geometry*, Birkhäuser 1992.
Klassiker mit Schwerpunkt Riemannsche Geometrie. Preis 55 Euro.

[5] Warner, F.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Graduate Text 1996.
Ebenfalls Klassiker, ausführliche und präzise Behandlung der Grundlagen, teilweise weniger anschaulich. Preis 75 Euro.