Aufgabe 1 *Produkt Topologie*
Sei $\mathcal{O}_M$ eine Topologie auf M, und $\mathcal{O}_N$ eine Topologie auf N.

1. Sei
$$\mathcal{O}_{M\times N} = \{\cup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \times C_\lambda : B_\lambda \in \mathcal{O}_M, C_\lambda \in \mathcal{O}_N\},$$
die sog. Produkttopologie auf $M \times N$. Weisen Sie nach dass $\mathcal{O}_{M\times N}$ tatsätlich eine Topologie ist.

2. Falls $\mathcal{O}_M$ und $\mathcal{O}_N$ Hausdorff sind, dann ist $\mathcal{O}_{M\times N}$ Hausdorff.

3. Falls $\mathcal{B}_M$ ein Basis von $\mathcal{O}_M$ ist, und $\mathcal{B}_N$ ein Basis von $\mathcal{O}_N$ ist, dann ist $\mathcal{B}_{M\times N} = \{B \times C : B \in \mathcal{B}_M, C \in \mathcal{B}_N\}$ ein Basis von $\mathcal{O}_{M\times N}$.

4. Falls M, N Mannigfaltigkeiten sind, dann ist $M \times N$ (mit der Produkttopologie) eine Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 2 *Beispiel 1.3 aus der Vorlesung*
Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf eine Menge X. Weisen Sie nach:

1. Für $M \subset X$, ist $\mathcal{O}_M = \{U \cap M : U \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf M.

2. $\mathcal{O}$ ist Hausdorff $\implies$ $\mathcal{O}_M$ ist Hausdorff.

3. $\mathcal{B}$ ist ein Basis von $\mathcal{O}$ $\implies$ $\mathcal{B}_M$ ist ein Basis von $\mathcal{O}_M$, wobei $\mathcal{B}_M = \{B \cap M : B \in \mathcal{B}\}$.

Aufgabe 3 *S^1 mit zwei Karten*
Man Zeige:
$$S^1 := \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\},$$
ist eine 1-dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit, die mit zwei karten beschrieben werden kann. Weiterhin gilt: S^1 ist nicht homeomorph zu $\mathbb{R}^1$.