Aufgabe 1 *3-dimensionale Heisenberg-Mannigfaltigkeit*

Sei $X := \mathbb{R}^3$ und Γ,

$$\Gamma := \{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \}.$$

1. Zeigen Sie, dass Γ mit Matrizen multiplikation eine Gruppe bildet.
2. Zeigen Sie, dass durch $\Gamma \times X \to X$ mit

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \to \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ z + ay + c \end{pmatrix}$$

eine eigentlich diskontunierliche Gruppenwirkung erklärt ist, die frei operiert. Der Quotient X/Γ heisst *3-dim Heisenberg-Mannigfaltigkeit*