Aufgabe.
Seien M^m und N^n differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n und $f : M^m \to N^n$ eine C^∞-Abbildung. Außerdem

$$\begin{aligned} &\phi : U \to \phi(U) && \text{Karte für } M\,, \\ &\psi : V \to \psi(U) && \text{Karte für } N \text{ mit } f(U) \subset V\,. \end{aligned}$$

Sei X ein Vektorfeld auf M mit lokaler Darstellung

$$X(x) = \sum_{i=1}^{m} {}^{\phi}X^i(x) \frac{{}^{\phi}\partial}{\partial x^i}(x) \qquad \text{für alle } x \in U\,.$$

Zeigen Sie:

$$Df(x)\big(X(x)\big) = \sum_{j=1}^{n} {}^{\psi}Y^j(y) \frac{{}^{\psi}\partial}{\partial x^j}(y)\,,$$

wobei $y = f(x)$ und

$$Y^j(y) = a_{ij}(x) X^i(x)\,,$$

wobei hier über die doppelt auftretenden Indizes summiert wird (*Einsteinsche Summenkonvention*), und

$$\big(a_{ij}(x)\big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

eine Matrix ist mit den Einträgen

$$a_{ij}(x) = \frac{\partial \psi^j \circ f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}(x)\,.$$