Aufgabe 1 *Metrische und induzierte Topologie.*
Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $\mathcal{O}_{(X,d)}$ die metrische Topologie auf X (siehe Definition 1.1 aus der Vorlesung). Sei $M \subset X$, $(M, \tilde{d})$ der induzierte metrische Raum, $\tilde{d}(x, y) := d(x, y)$ für alle $x, y \in M$, und $\mathcal{O}_{(M,\tilde{d})}$ die metrische Topologie auf M, die von $(M, \tilde{d})$ kommt. Schließlich sei $\mathcal{O}_M$ die induzierte Topologie (von $\mathcal{O}_{(X,d)}$) auf M. Man Zeige: $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{(M,\tilde{d})}$.

Aufgabe 2 *Stetigkeit und die Quotienttopologie*
Seien X, Y topologische Räume, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $[z] := \{w \in X : w \sim z\}$ die Äquivalenzklasse von z, $X/_\sim := \{[z] : z \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/_\sim$, $z \to [z]$ die kanonische Projektion, und sei $X/_\sim$ mit der Quotienttopologie versehen. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung mit $f(x) = f(y)$ für alle x, y mit $x \sim y$ (also, f ist konstant auf jeder Fasser). Zeigen Sie:

1. $\tilde{f} : X/_\sim \to Y$ durch $\tilde{f}([x]) = f(x)$ ist wohldefiniert.
2. f ist stetig $\iff$ $\tilde{f}$ ist stetig .

Aufgabe 3 *Punktkompaktifizierung*
Sei X eine Menge mit einer Topologie $\mathcal{O}$. Definition: X ist *lokal kompakt*, falls für jeden Punkt $x \in X$ ein $U \in \mathcal{O}$ und ein $K \subseteq X$ existieren, so dass $U \subseteq K$, K kompakt, und $x \in U$.
Sei X lokal kompakt und Hausdorffsch. Die Punktkompaktifierung von X ist $\tilde{X} = X \cup \{q\}$ ($q \notin X$ ist ein beliebiger Punkt) mit der Topologie $\tilde{\mathcal{O}}$, wobei $\tilde{\mathcal{O}}$ durch

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \{(X - K) \cup \{q\} : K \subseteq X, K \text{ kompakt } \}$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

1. $\tilde{\mathcal{O}}$ ist eine Topologie auf $\tilde{X}$.
2. $\tilde{X}$ ist Hausdorffsch.
3. $\tilde{X}$ ist kompakt.

   (Zur Erinerung: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist Kompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Überdeckung beinhält. Eine offene Überdeckung von A ist eine Teilmenge $\mathcal{O}'$ von $\mathcal{O}$ so dass $A \subseteq \cup_{U \in \mathcal{O}'} U$.

Aufgabe 4 *Hausdorffsch oder nicht?*

Sei $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$, p ein beliebiger Punkt nicht in $\mathbb{R}$. Sei $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$. Sei

$$\mathcal{O} = \{U \cup V : U \in \mathcal{O}_\mathbb{R}, V = \emptyset, \text{ oder } V = \{p\} \cup (W \setminus \{0\}), \text{ wobei } W \in \mathcal{O}_\mathbb{R}, \text{ mit } 0 \in W\}.$$

1. Zeigen Sie dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$ ist.
2. Konstruieren Sie einen C^0-Atlas für $(M, \mathcal{O})$.
3. Ist M Hausdorfsch?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 8.11.2005 bis 11:15.