Aufgabe 1 ($H^1(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$)
Sei $c : [0, 2\pi] \to (\mathbb{R}^2\backslash\{0\}), c(t) := (\cos t, \sin t)$. Dann ist die Abbildung $F : H^(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}$,

$$F([\omega]) := \int_c \omega,$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

Aufgabe 2 (*Orientierung komplexer Mannigfaltigkeiten*)
Fassen Sie $A \in GL_n(\mathbb{C})$ als reelle $2n \times 2n$-Matrix auf, indem Sie $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ über $z = x + iy \mapsto (x, y)$ identifizieren. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det_{\mathbb{R}^{2n}}(A) > 0.$$

Dies bedeutet, dass die einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit zugrundeliegende $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit orientierbar ist.

Aufgabe 3 (*Zum Beweis des Lemma von Poincaré*)
Sei $\alpha \in \Omega^k((a, b) \times M)$ mit $\frac{\partial}{\partial t} \lfloor \alpha = 0$. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial t} \lfloor (dt \wedge \alpha) = \alpha$.

Aufgabe 4 (*Zum Beweis des Lemma von Poincaré Teil II*)
Sei $\alpha \in \Omega^k((a, b) \times M)$ mit $\frac{\partial}{\partial t} \lfloor \alpha = 0$. Dann gilt: $\frac{\partial}{\partial t} \lfloor d_x\alpha = 0$, und $\frac{\partial}{\partial t} \lfloor \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 24.01.2006 bis 11:15.