Aufgabe 1 *Nirgends verschwindendes Vektorfeld auf* S^{2n+1}

Sei $M := S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Zu $p \in S^{2n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, setze $c_p(t) = p\cos t + ip \cdot \sin t \in S^{2n+1}$. Zeigen Sie:

1. $X(p) = \dot{c}_p(0)$ ist ungleich null für alle $p \in M$.
2. Das gerade definierte Vektorfeld X ist C^∞.

Aufgabe 2 *Äquivalenz von* ${}_2T_pM^n$ *und* ${}_1T_pM^n$

Man beweise, dass die Abbildung ${}^pJ_{1,2} : {}_1T_pM^n \to {}_2T_pM^n$ (wie in der Vorlesung definiert) linear ist.

Aufgabe 3 *Koordinaten Vektoren*

Sei $e_i(p) \in {}_2T_p\mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, die Derivation in p gegeben durch $e_i(p)([f]) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ für alle $f \in C^\infty_M(p)$, wobei $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+he_i)-f(p)}{h}$ die partiellen Ableitungen sind. Man zeige:

1. $e_i(p)$ ist eine wohldefinierte Derivation.
2. Sei $\phi : U \subset M^n \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte einer diff. Mannigfaltigkeit M. Dann gilt
$$D\phi^{-1}(p)(e_i(p)) = \frac{{}^\phi\partial}{\partial x^i}(\phi^{-1}(p)),$$
wobei ${}_2T_p\mathbb{R}^n$, $\frac{{}^\phi\partial}{\partial x^i}$ und D sind wie in der Vorlesung definiert.

Aufgabe 4 *Vektorfelder auf* $\mathbb{R}P^n$

Konstruieren Sie ein C^∞-Vektorfeld X auf $\mathbb{R}P^n$, so dass

1. X keine Nullstelle hat, falls n ungerade ist.
2. X genau eine Nullstelle hat, falls n gerade ist.

Hinweis: Benutzen Sie als Hilfsmittel die Vektorfelder, die in Aufgabe 1 konstruiert worden sind.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. den Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 29.11.2003 bis 9:15.