Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie I — WS 05/06, Serie 1
Dr. M. Simon — 25. Oktober 2005

Aufgabe 1 *Partition der Eins für* $\mathbb{R}$.

1. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$g(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & x \in (0, \infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$
Weisen Sie nach, dass g eine C^∞ Funktion ist.

2. Mit Hilfe von 1.1, konstruieren Sie eine C^∞ Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \bigcup\{0\}$ mit
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

3. Mit Hilfe von 1.2, konstruieren Sie C^∞ Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \bigcup\{0\}$, $i \in \mathbb{Z}$, mit
$$f_i(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, i-2) \\ 1, & x \in (i-1, i) \\ 0, & x \in (i+1, \infty) \end{cases}$$
und
$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_{2i} \equiv 1.$$

4. Fertigen Sie eine Skizze (Graph) von den f_i.

Aufgabe 2 *Stetigkeit in metrischen Räumen*

Seien X, Y metrische Räume mit der (jeweils) von der Metrik induzierten Topologie, und sei $f : X \to Y$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für all offenen $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ offen.

2. Für alle konvergenten Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X gilt $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(\lim_{i\to\infty} x_i)$.

Aufgabe 3 *Das Kreuz*

Zeigen Sie: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$, mit der induzierten Topologie, ist keine C^0-Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 4 *Homöomorph zu* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

Sei $N = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Topologie: wir schreiben S^{n-1} als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und damit liegt $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $M = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $h : M \to N$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 01.11.2005 bis 11:15.